第十周 强化学习

李泽桦，复旦大学生物医学工程与技术创新学院

课件内容参考浙江大学吴飞老师《人工智能引论》

强化学习

谋定而后动，知止而有得

强化学习是智能体（agent）在不断与其所处环境交互的过程中进行学习的一种方法。在这种方法中，智能体通过“尝试与试错”和“探索与利用”等机制在所处状态采取行动，不断与环境交互，直至进入终止状态，根据在终止状态所获得的奖惩来改进行动策略，序贯完成决策任务。

在强化学习中，学习信号以奖励形式出现，智能体在与环境交互中取得最大化收益，这种学习方式既不是从已有数据出发，也不是依赖于已有知识的学习方式，犹如“tabula rasa（拉丁语）”所蕴含的“一张白纸绘蓝图”之义，从“授之以鱼”迈向“授之以渔”。

目录

《西游记》、《黑神话悟空》与强化学习

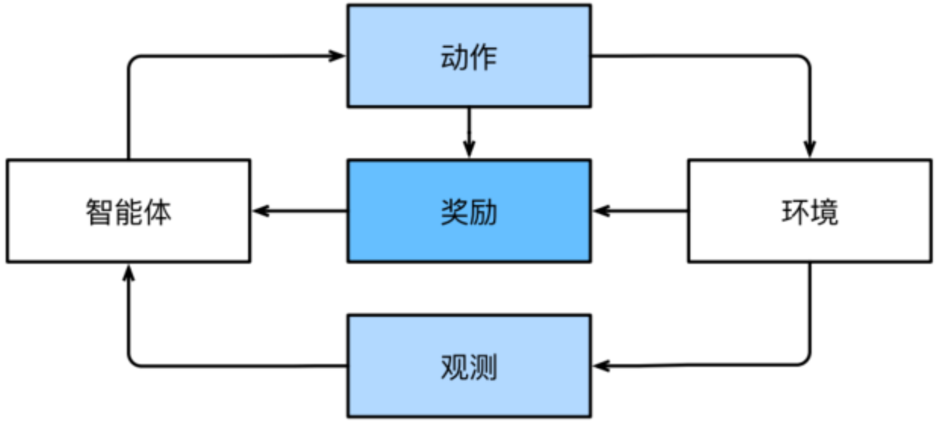
- **人生没有预先写好的剧本，与生活这一环境交互成长**
- **取经路上花费14年，游戏通关100小时**

唐太宗送别唐三藏于长安城
师徒四人西天取经

玩家在打怪一次次失败时积累经验学习策略
充分探索环境以解锁更多“剧情、奖励”

强化学习的核心概念

- **智能体（agent）**：智能体是强化学习算法的主体，它能够根据经验做出主观判断并执行动作，是整个智能系统的核心。
- **环境（environment）**：智能体以外的一切统称为环境，环境在与智能体的交互中，能被智能体所采取的动作影响，同时环境也能向智能体反馈状态和奖励。虽说智能体以外的一切都可视为环境，但在设计算法时常常会排除不相关的因素建立一个理想的环境模型来对算法功能进行模拟。状态可以理解为智能体对环境的一种理解和编码，通常包含了对智能体所采取决策产生影响的信息。
- **状态（state）**：状态可以理解为智能体对环境的一种理解和编码，通常包含了对智能体所采取决策产生影响的信息。

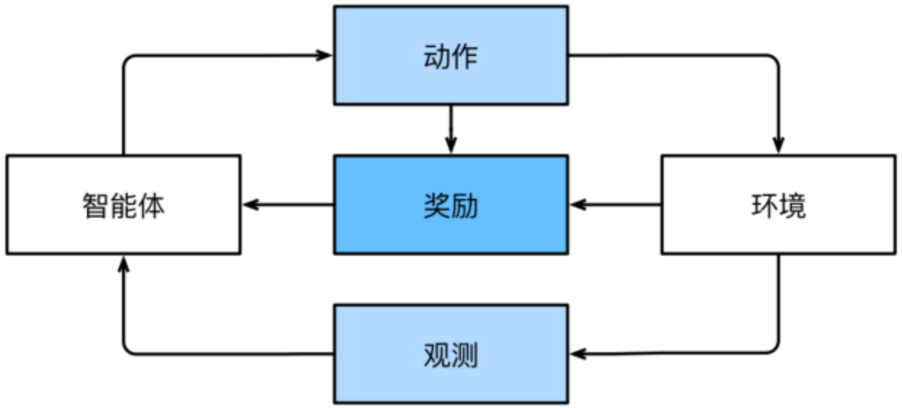


强化学习的若干术语概念

- **动作（action）**：动作是智能体对环境产生影响的方式，这里说的动作常常指概念上的动作，如果是在设计机器人时还需考虑动作的执行单位。

- **策略（policy）**：策略是智能体在所处状态下去执行某个动作的依据，即输入是一个状态，智能体可根据一个策略来选择应该采取的动作作为输出89。

- **奖励（reward）**：奖励是智能体序贯式采取一系列动作后从环境获得的收益。注意奖励概念是现实中奖励和惩罚的统合，一般用正值来代表实际奖励，用负值来代表实际惩罚。



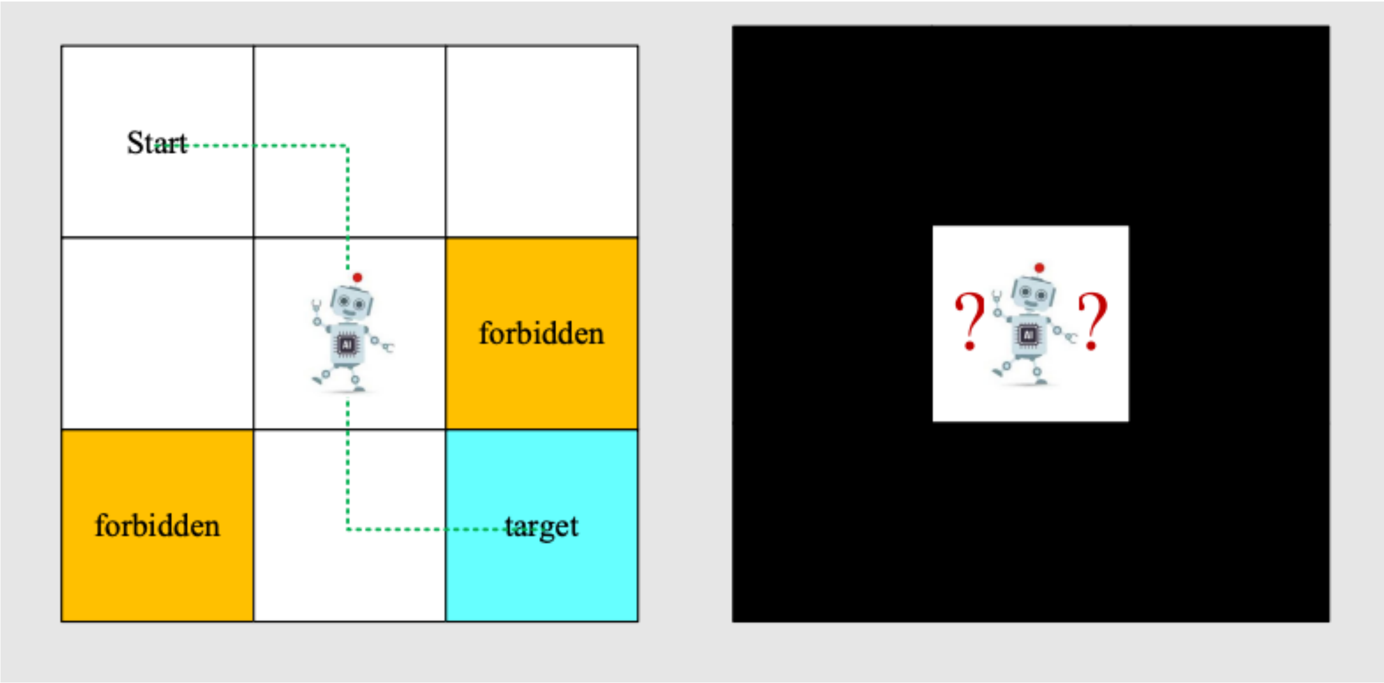
强化学习的建模方式

- **输入：** $(\mathcal{S}, \mathcal{A}, P, R)$
- 状态空间，$\mathcal{S} = \{s_i\}_{i=1}^{N}$
- 动作空间，$\mathcal{A} = \{a_k\}_{k=1}^{M}$
- 转移函数，$P: \mathcal{S} \times \mathcal{A} \to S$
- 奖励函数，$R: \mathcal{S} \times \mathcal{A} \to \mathbb{R}$

- **输出：** 策略，$\pi: \mathcal{S} \to \mathcal{A}$

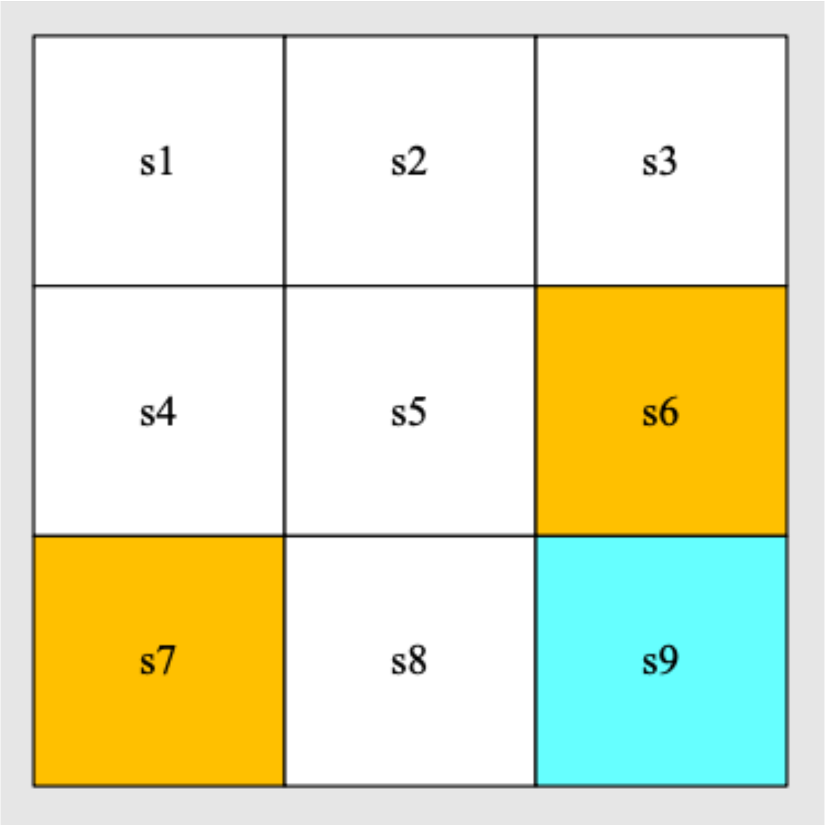
Gride-world Example

- 从任意位置找到能抵达targe的路线



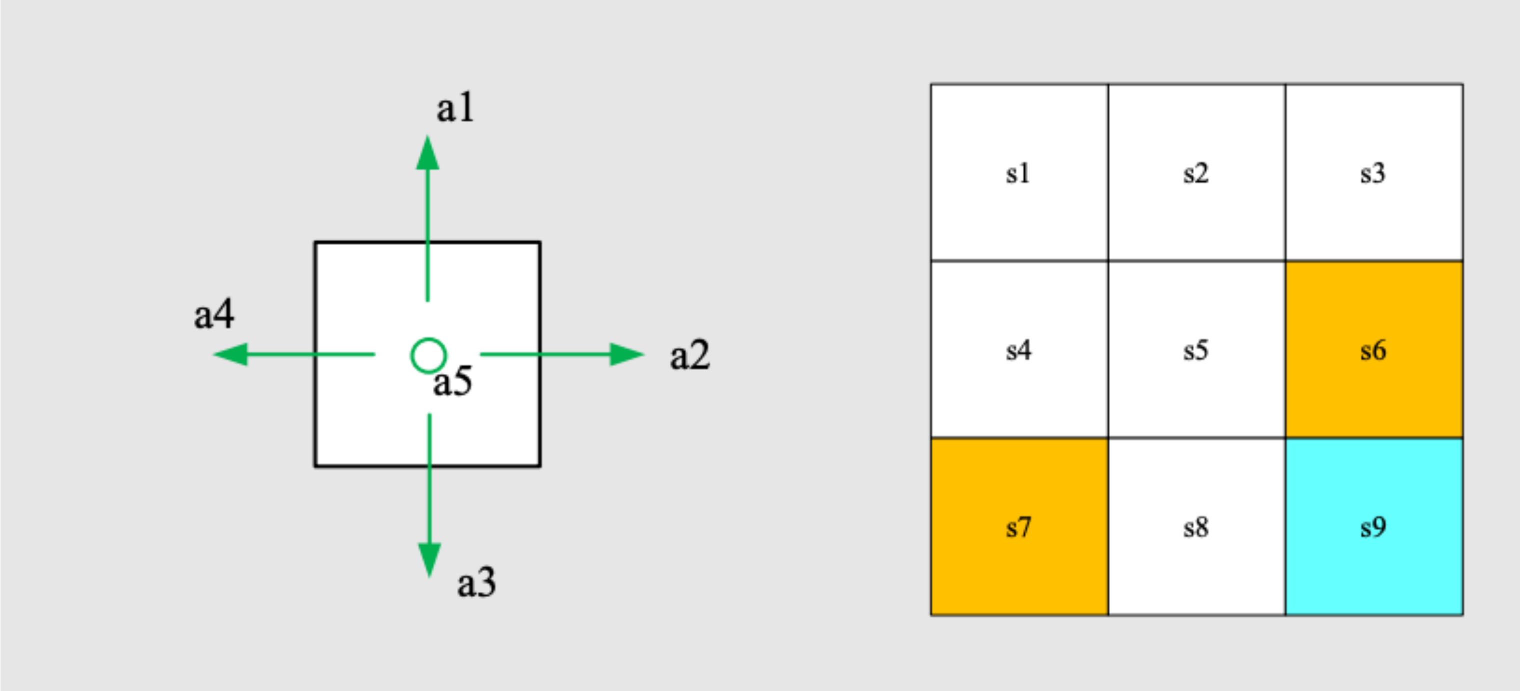
状态空间，$\mathcal{S}=\{s_i\}_{i=1}^{N}$

- 智能体在环境中的位置
- 共有9个可能的状态：$s_1, s_2, \dots, s_9$



动作空间，$\mathcal{A} = \{a_k\}_{k=1}^{M}$

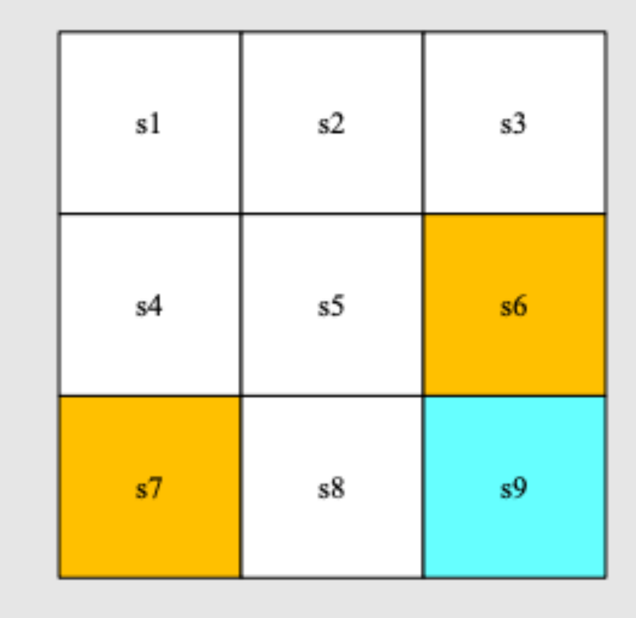
- 每一个状态下的动作
- 比如，a_1：向上走



转移函数，$P: \mathcal{S}\times\mathcal{A} \to \mathcal{S}$

- 在一个状态，做一个动作之后的状态变化

	a_1 (upward)	a_2 (rightward)	a_3 (downward)	a_4 (leftward)	a_5 (still)
s_1	s_1	s_2	s_4	s_1	s_1
s_2	s_2	s_3	s_5	s_1	s_2
s_3	s_3	s_3	s_6	s_2	s_3
s_4	s_1	s_5	s_7	s_4	s_4
s_5	s_2	s_6	s_8	s_4	s_5
s_6	s_3	s_6	s_9	s_5	s_6
s_7	s_4	s_8	s_7	s_7	s_7
s_8	s_5	s_9	s_8	s_7	s_8
s_9	s_6	s_9	s_9	s_8	s_9

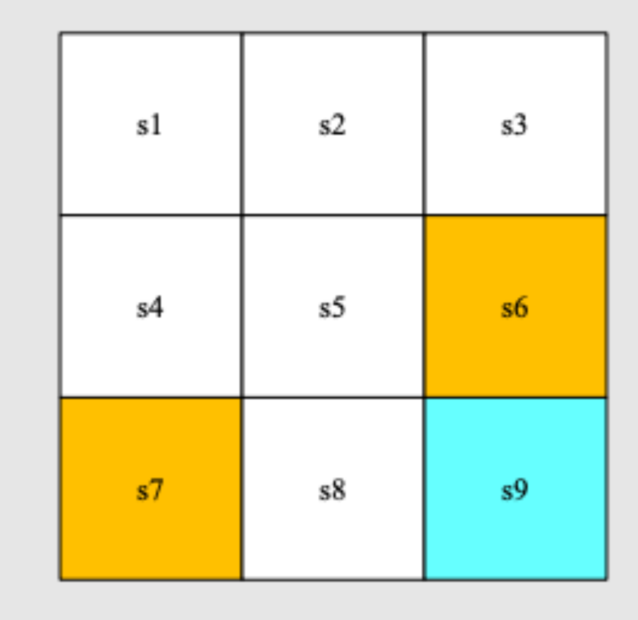


- 可以是Stochastic的, 即$p(s'|s,a)$

奖励函数，$R: \mathcal{S} \times \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{R}$

- 在一个状态，做一个动作之后获得的收益

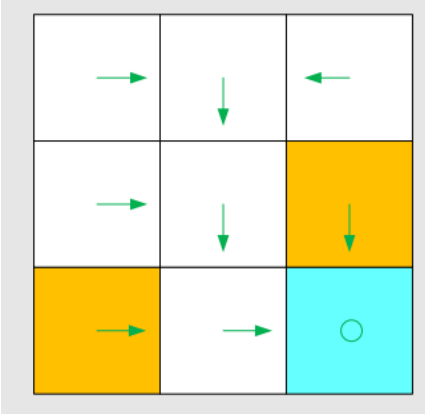
	a_1 (upward)	a_2 (rightward)	a_3 (downward)	a_4 (leftward)	a_5 (still)
s_1	r_{bound}	0	0	r_{bound}	0
s_2	r_{bound}	0	0	0	0
s_3	r_{bound}	r_{bound}	r_{forbid}	0	0
s_4	0	0	r_{forbid}	r_{bound}	0
s_5	0	r_{forbid}	0	0	0
s_6	0	r_{bound}	r_{target}	0	r_{forbid}
s_7	0	0	r_{bound}	r_{bound}	r_{forbid}
s_8	0	r_{target}	r_{bound}	r_{forbid}	0
s_9	r_{forbid}	r_{bound}	r_{bound}	0	r_{target}



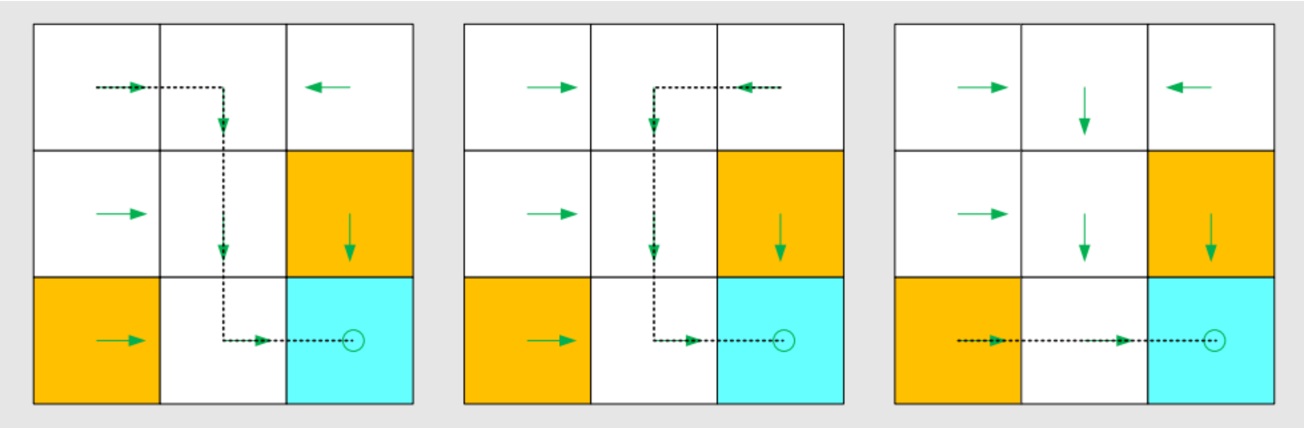
- 可以是Stochastic的, 即$p(r|s,a)$

策略，$\pi : \mathcal{S} \to \mathcal{A}$

- 智能体在空间中的行为规则



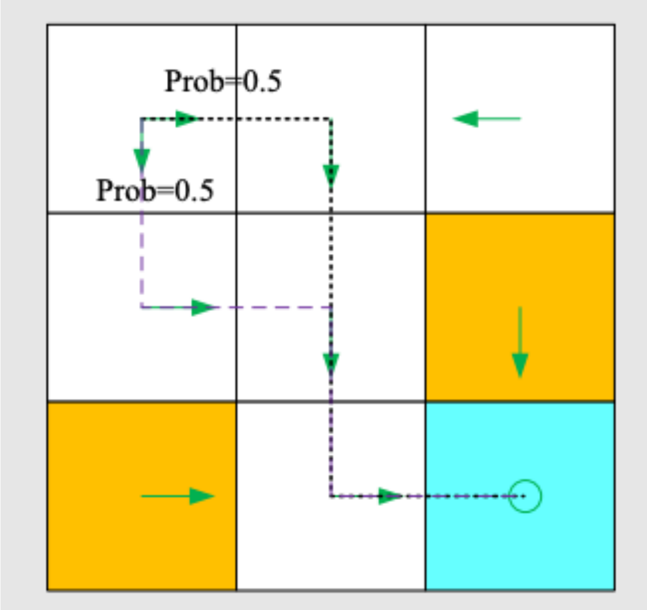
- 有了策略之后，就可以在任意位置找到抵达target的最优路径



策略，$\pi: \mathcal{S} \to \mathcal{A}$

- 本质，或者代码实现上也是一个表格

	a_1 (upward)	a_2 (rightward)	a_3 (downward)	a_4 (leftward)	a_5 (still)
s_1	0	0.5	0.5	0	0
s_2	0	0	1	0	0
s_3	0	0	0	1	0
s_4	0	1	0	0	0
s_5	0	0	1	0	0
s_6	0	0	1	0	0
s_7	0	1	0	0	0
s_8	0	1	0	0	0
s_9	0	0	0	0	1



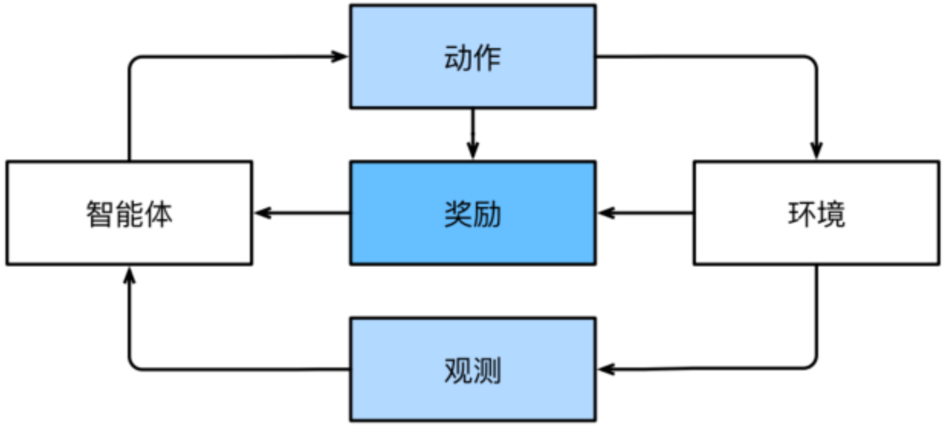
强化学习：在环境交互中学习

生活中常见的学习过程

- 人通过动作对环境产生影响（向前走一步）
- 环境向人反馈状态的变化（撞到了树上）
- 人估计动作得到的收益（疼痛）
- 更新做出动作的策略（下次避免向有树这一障碍的方向前进）

```python
def step(self, action):
    if action == 0:  # 向前走
        if self.state < self.n_states - 1:
            self.state += 1
            if self.state == 9:  # 假设状态9有树
                reward = -1  # 撞到树，得到负奖励
```

强化学习模仿了上述过程，
在智能主体与环境交互的过程中，
学习能收获最大化收益的行动模式。



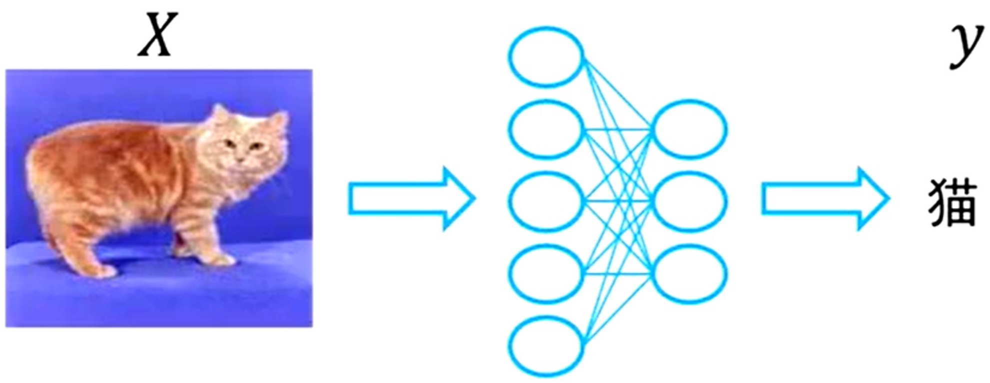
回顾机器学习的不同类型

有监督学习

从数据X和标签y中学习映射$f: X \mapsto y$

X：图像、文本、音频、视频等

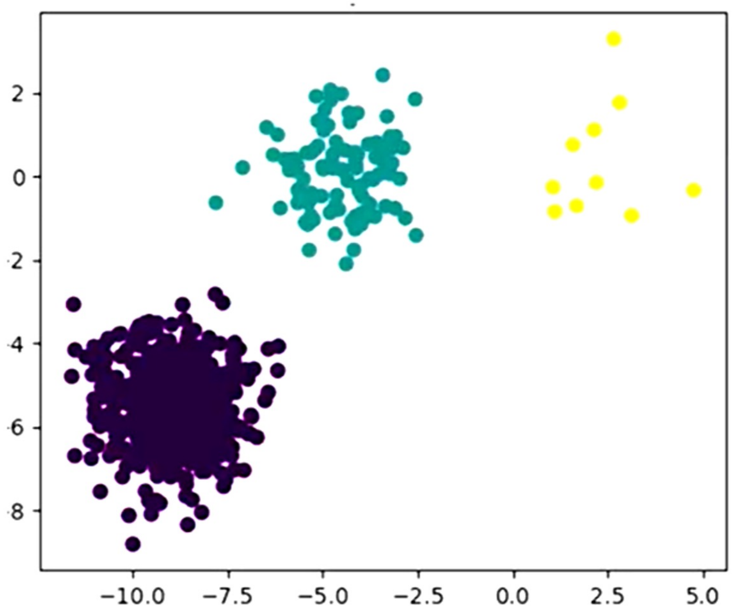
y：连续或离散的标量、结构数据



分类问题

无监督学习

寻找数据X中存在的结构和模式



聚类问题

监督学习、无监督学习和强化学习各自的特点

	有监督学习	无监督学习	强化学习
学习依据	基于监督信息	基于对数据结构的假设	基于评估（evaluative）
数据来源	一次性给定	一次性给定	在交互中产生（interactive）
决策过程	单步（one-shot）	无	序列（sequential）
学习目标	样本到语义标签的映射	数据的分布模式	选择能够获取最大收益的的状态到动作的映射

强化学习的特点

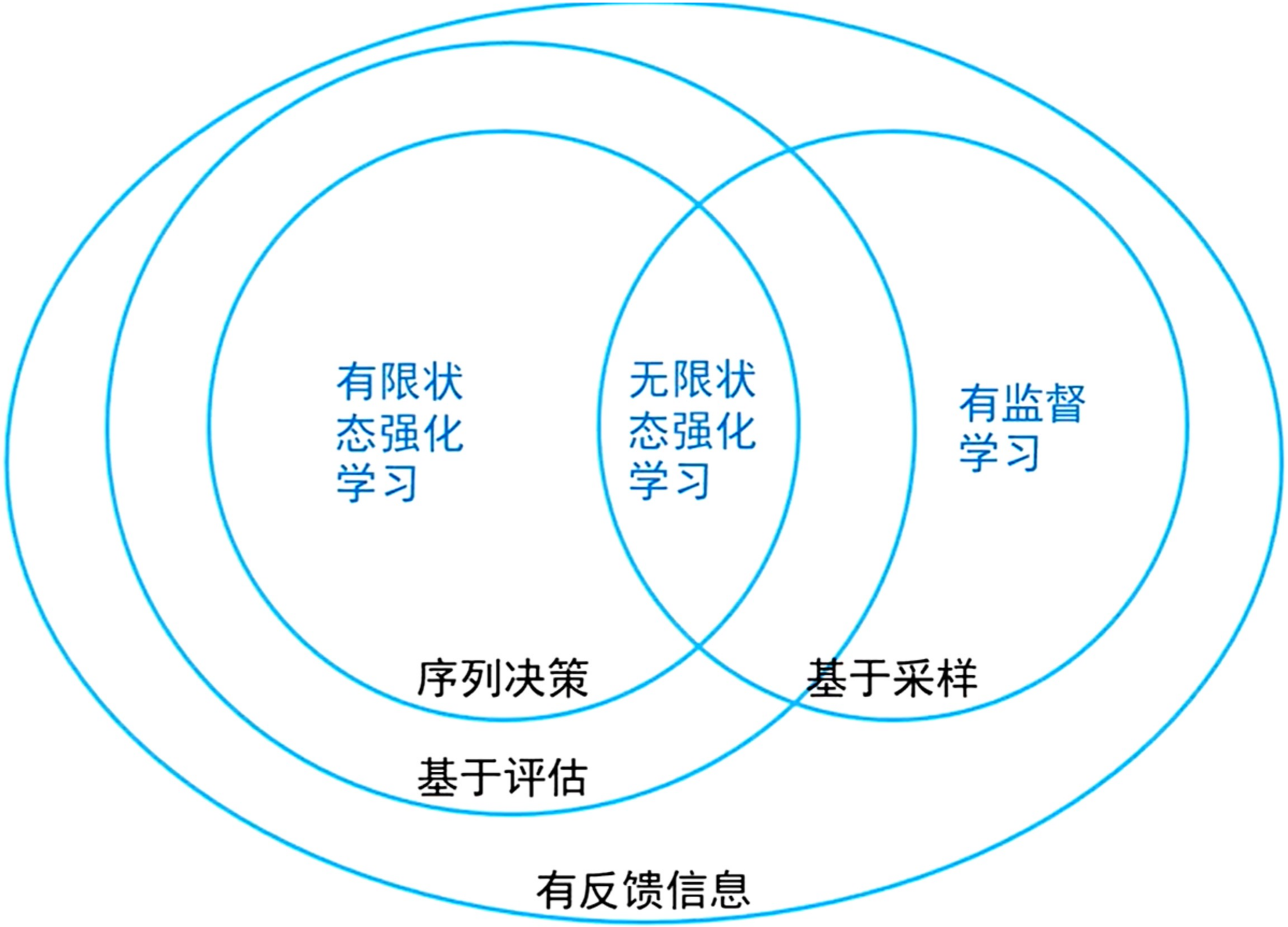
- **基于评估：**强化学习利用环境评估当前策略，以此为依据进行优化
- **交互性：**强化学习的数据在与环境的交互中产生
- **序列决策过程：**智能主体在与环境的交互中需要作出一系列的决策，这些决策往往是前后关联的

注：现实中常见的强化学习问题往往还具有奖励滞后，基于采样的评估等特点

监督学习、无监督学习和强化学习各自的特点

根据以下特点直观定位强化学习

- **有**/无可靠的反馈信息
- **基于评估**/基于监督信息
- **序列决策**/单步决策
- **基于采样**/基于穷举



马尔可夫性质与马尔可夫链——统计天气

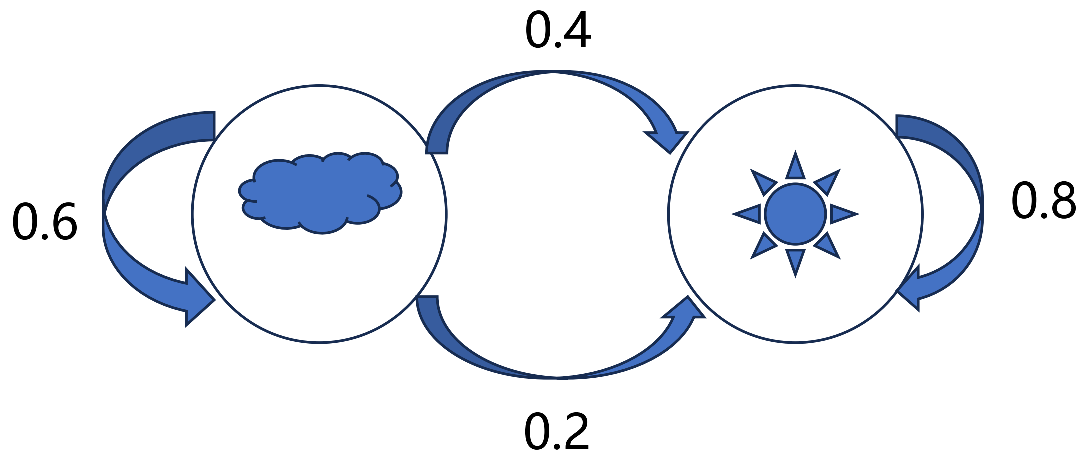
天气变化的数学语言表示：

P（明雨 | 今雨）= 0.6

P（明不雨 | 今雨）= 0.4

P（明雨 | 今不雨）= 0.2

P（明不雨 | 今不雨）= 0.8



并且第二天是否下雨只与今天的天气有关

P（明雨 | 今雨）= P（明雨 | 今雨、昨不雨）= P（明雨 | 今雨、昨不雨 、前天雨) =0.6

该性质是**马尔可夫性质（Markov Property）**，即**过程的无后效性**：在给定当前状态的条件下，未来状态与过去状态是独立的。过程的未来行为只依赖于当前状态，而与之前的历史状态无关。

$$Pr(S_{t+1}=x_{t+1}|S_0=x_0,S_1=x_1,\cdots,S_t=x_t)=Pr(S_{t+1}=x_{t+1}|S_t=x_t)$$

$t+1$时刻状态仅与t时刻状态相关

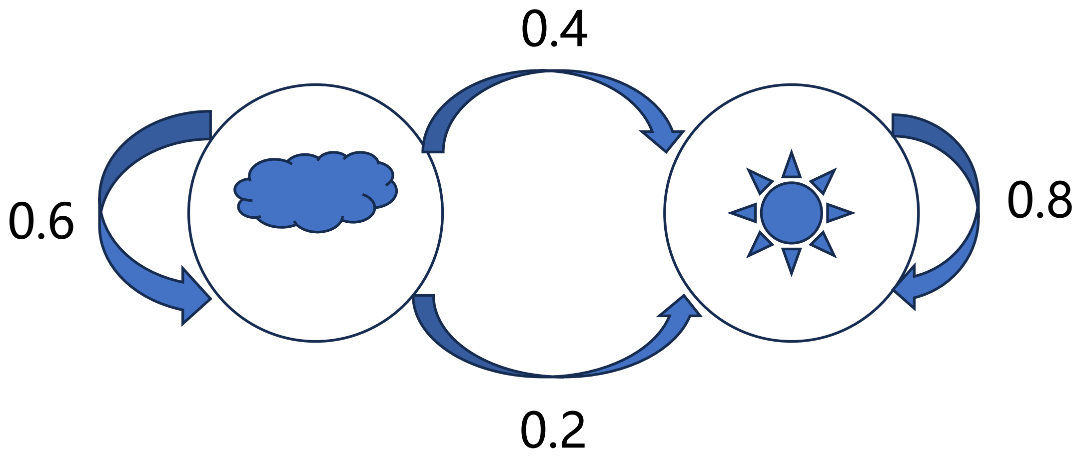
马尔可夫性质与马尔可夫链——统计天气

马尔可夫链（Markov Chain）：

满足马尔可夫性质的离散随机过程，也被称为**离散马尔可夫过程。** 在离散的时间序列t=0,1,2,3，...中由系统状态与转移概率两者共同组成

- 系统状态：S={1,2,...，N}表示为整个状态空间，为所有可能的系统状态的合集，N为总状态个数；s(t)为系统在t时刻处在的系统状态，显然s(t)∈S
- 转移概率P_{ij}表示从状态i跳转为状态j的概率，即：

$$P_{ij} = \Pr\{ s(t+1)=j \mid \{s(t)=i \}$$
$$= \Pr\{ s(t+1)=j \mid \{s(t)=i , s(t-1)=k ,..., s(1)=a \}$$



在天气例子中，系统状态为S={晴天，雨天}，N=2，t代表天数，各个状态的转变概率则如图所示。

马尔可夫性质与马尔可夫链——思考题

思考下列情况是否符合马尔可夫链的过程：

假设投掷一个公平的骰子，即{1，2，3，4，5，6}以同等概率出现。假设每次出现的数字均为独立。

请判断下面过程是否为马尔可夫过程？如果是，请说明具体状态及转移概率。

- 每次出现的数字组成的序列；
- 两次投出数字3之间的投掷次数
- 两次投出数字1，2，3之间的投掷次数

马尔可夫性质与马尔可夫链——思考题

思考下列情况如何通过马尔可夫过程得以计算：

假设投掷一枚出现正反面概率相等的硬币，假设每次抛射的结果都相互独立。计算：

- 从一开始抛射到第一次连续两次出现正面的期望时间
- 从开始抛射到第一次连续三次出现正面的期望时间

S0：无连续正面（初始状态）；S1：有一个连续正面; S2：两个连续正面（目标状态）

从S0走到S2（最终）的步数为E0：**E0=1+1/2*E1+1/2*E0**

从S1走到S2（最终）的步数为E1：**E1=1+1/2*0+1/2*E0**

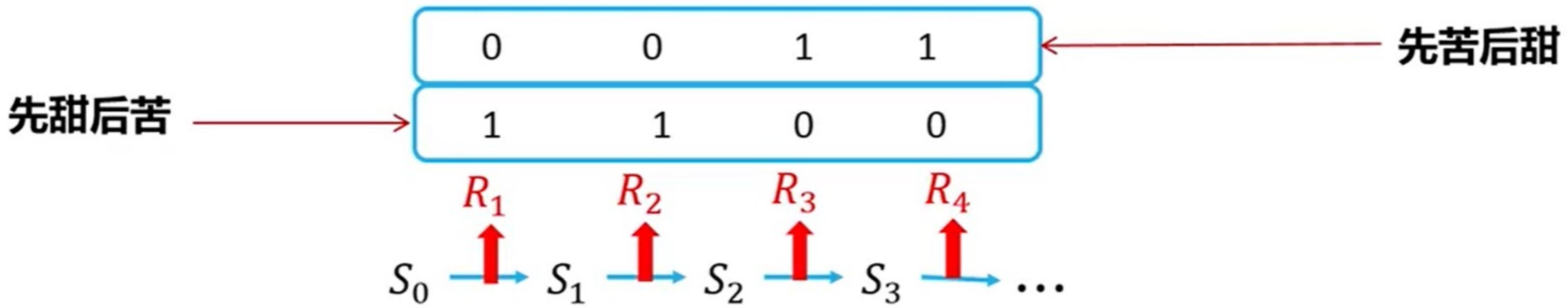
E0+E1

离散马尔可夫链：引入奖励机制

为了在序列决策中对目标进行优化，在马尔可夫随机过程框架中加入了**奖励机制**：

- **奖励函数**$\boldsymbol{R}: \boldsymbol{S}\times\boldsymbol{S} \mapsto \mathbb{R}$，其中$R(S_t, S_{t+1})$描述了从第$t$步状态转移到第 $t+1$步状态所获得奖励
- 在一个序列决策过程中，不同状态之间的转移产生了一系列的奖励$(R_1, R_2, \cdots)$，其中R_{t+1}为$R(S_t, S_{t+1})$的简便记法。
- 引入奖励机制，这样可以衡量任意序列的优劣，即对序列决策进行评价。

问题：给定两个因为状态转移而产生的奖励序列$(1, 1, 0, 0)$和$(0, 0, 1, 1)$，哪个序列决策更好?



离散马尔可夫链：引入回报

使用奖励机制对序列决策进行评价

奖励序列$(1,1,0,0)$和$(0,0,1,1)$，哪个序列决策更好?

0	0	1	1

1	1	0	0

$$S_0 \xrightarrow{R_0} S_1 \xrightarrow{R_1} S_2 \xrightarrow{R_2} S_3 \xrightarrow{R_3} \cdots$$

计算累计奖励：引入折扣引子$\gamma = 0.99$

$(1,1,0,0)$：$G_0 = 1 + 0.99\times 1 + 0.99^2\times 0 + 0.99^3\times 0 = 1.99$

$(0,0,1,1)$：$G_0 = 0 + 0.99\times 0 + 0.99^2\times 1 + 0.99^3\times 1 = 1.9504$

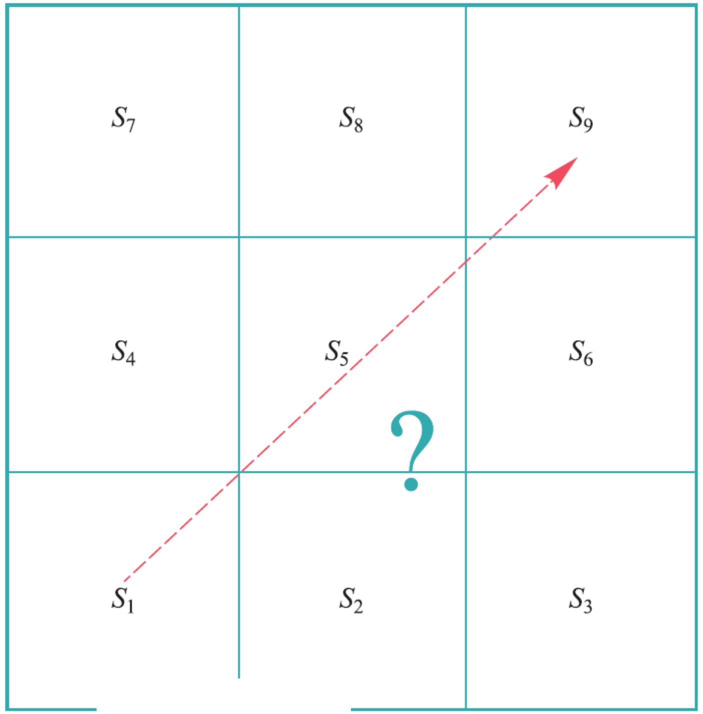
折扣系数小于1时，越遥远的未来对累加回报的贡献越少

结论：(1,1,0,0)回报值高，是更好的奖励序列。 **关注眼前**

近的奖励，对该时刻的影响更大，RL奖励机制更注重短期收益。

马尔可夫决策过程：机器人寻路问题

如图所示3*3的网格，假设有一个机器人位于s_1，试图从s_1这一初始位置向s_9这一目标位置移动。

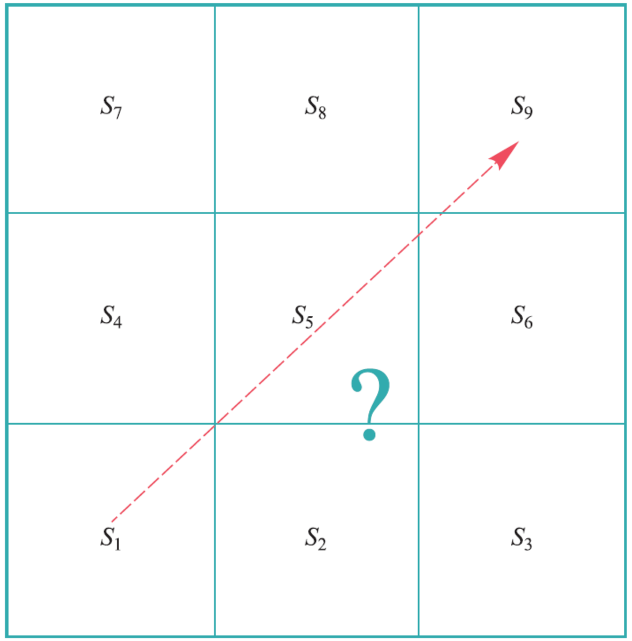


- 假设机器人每一步只能向上或者向右移动一个方格，到达目标位置s_9则会获得奖励且游戏终止，机器人在移动过程中如果越出方格则会被惩罚且被损坏、并且游戏终止。

- 如何学习一种**策略**能够帮助机器人从s_1走到s_9?

马尔可夫决策过程：机器人寻路问题

智能主体	**迷宫机器人**
环境	3×3**方格**
状态	**机器人当前时刻所处方格**
动作	**每次移动一个方格**
奖励	**到达**s_9**时给予奖励；越界时给予惩罚**



机器人寻路问题

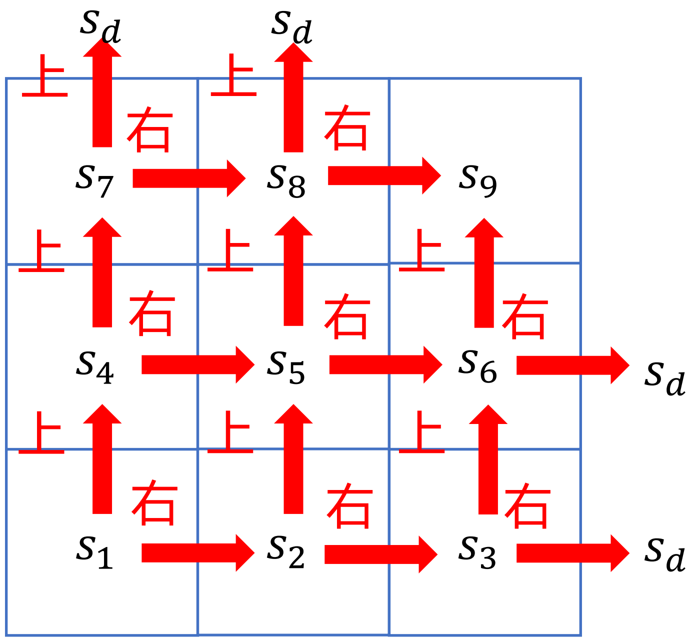
马尔可夫链：机器人寻路问题

马尔可夫过程： $\boldsymbol{MP} = \{\boldsymbol{S}, \boldsymbol{P}\}$用来刻画该问题

状态集合:$\boldsymbol{S} = \{\boldsymbol{s_1}, \boldsymbol{s_2}, \cdots, \boldsymbol{s_9}, \boldsymbol{s_d}\}$

随机变量序列:$\{\mathrm{S_t}\}_{\mathrm{t=0,1,2,\cdots}}$ 其中$\boldsymbol{S_t}$**表示机器人第**$\boldsymbol{t}$**步的位置**

状态转移概率:$\boldsymbol{P(S_{t+1}|S_t)}$，**例如：每个箭头对应0.5的转移概率**



注意：这个模型不能体现机器人能动性，缺乏与环境进行进行交互的手段(如目标优化方式等)!!!

马尔可夫奖励过程

使用离散马尔可夫过程描述机器人移动问题

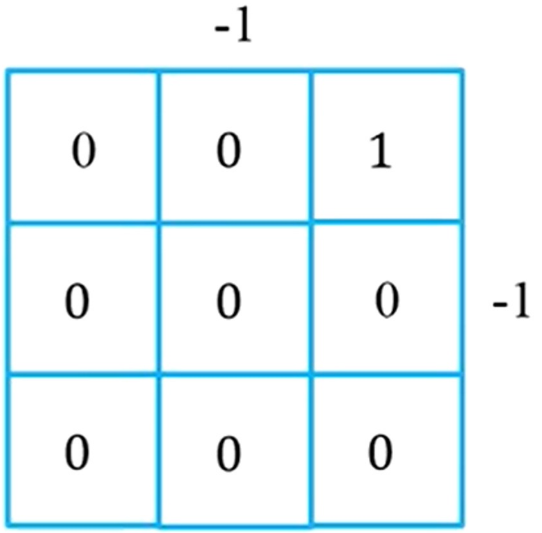
- 随机变量序列$\{S_t\}_{t=0,1,2,\cdots}$：S_t表示机器人第t步的位置，每个随机变量S_t的取值范围为$S=\{s_1,s_2,\cdots,s_9,s_d\}$
- 状态转移概率：$Pr(S_{t+1}|S_t)$满足马尔可夫性

⇦ 马尔可夫过程

- 定义奖励函数$R(S_t,S_{t+1})$：从S_t到S_{t+1}所获得奖励，其取值如图中所示
- 定义衰退系数：$\gamma\in[0,1]$

γ的大小反映用户在短期收益和长期收益间的取舍

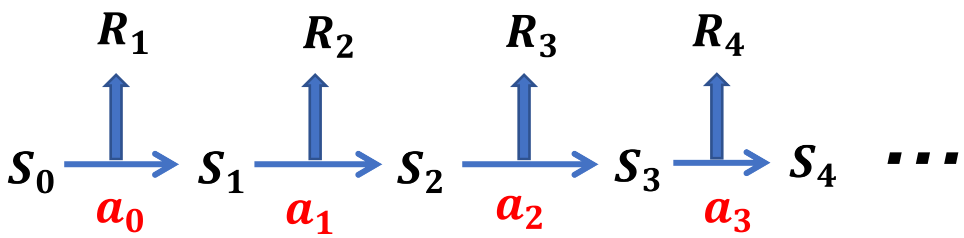
综合以上信息，可用$MRP=\{S,Pr,R,\gamma\}$来刻画马尔科夫奖励过程



这个模型不能体现机器人能动性，仍然缺乏与环境进行进行交互的手段

马尔可夫决策过程：引入动作

- **状态集合**S：所有可能出现的状态所构成的集合（有限 or 无限）
- **动作集合**A：智能体能够采取的所有动作所构成集合（有限 or 无限），在机器人移动问题中是有限集合
- **状态转移概率**$P(S_{t+1}|S_t, A_t)$：表示在当前状态S_t下采取了动作A_t后进入下一时刻状态S_{t+1}的概率。状态转移可以是概率性的（stochastic），也可以是确定的（deterministic）。确定的状态转移指在给定状态S_t下采取了动作A_t后，转移到某一状态的概率为1
- **奖励函数**$R(S_t, A_t, S_{t+1})$：在状态S_t执行了动作A_t后到达状态S_{t+1}时，智能体能够得到的奖励
- **折扣因子**γ：后续时刻奖励对当前动作的价值系数，$\gamma \in [0,1]$



马尔可夫决策过程 举例

如下定义马尔可夫决策过程（Markov decision process，MDP） $\boldsymbol{MDP=(S,A,P,R,\gamma)}$

- 状态集合：$S=\{s_1,s_2,\cdots,s_9,s_d\}$
- 动作集合：$A=\{$上，右$\}$
- 奖励函数：$R(S_t,A_t,S_{t+1})=\begin{cases}1, & \text{如果}S_{t+1}: \\ -1, & \text{如果}S_{t+1}: \\ 0, & \text{其他情况}\end{cases}$
- 折扣因子：$\gamma=0.99$
- 初始状态$S_0=s_1$，终止状态集合$S_T=\{s_9,s_d\}$。

$\mathbf{P(S_{t+1}|S_t,a_t=右)}$

S_t \ S_{t+1}	s_1	s_2	s_3	s_4	s_5	s_6	s_7	s_8	s_9	s_d
s_1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
s_2	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
s_3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
s_4	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0
s_5	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0
s_6	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
s_7	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0
s_8	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0
s_9	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1

图1：状态转移矩阵（向右）

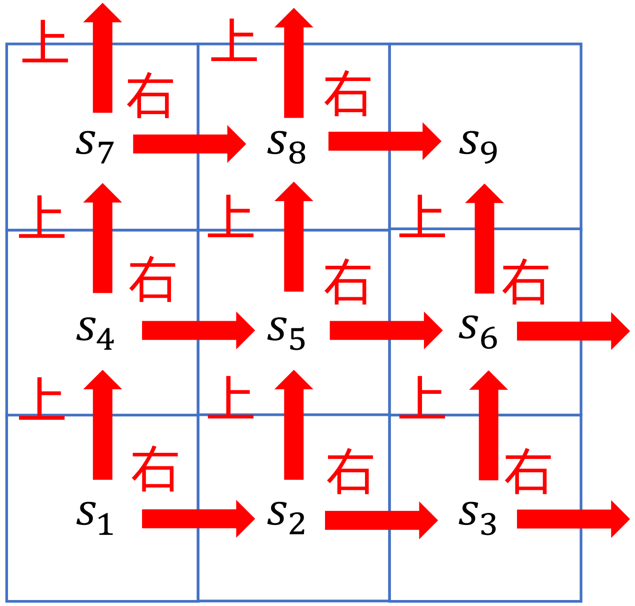
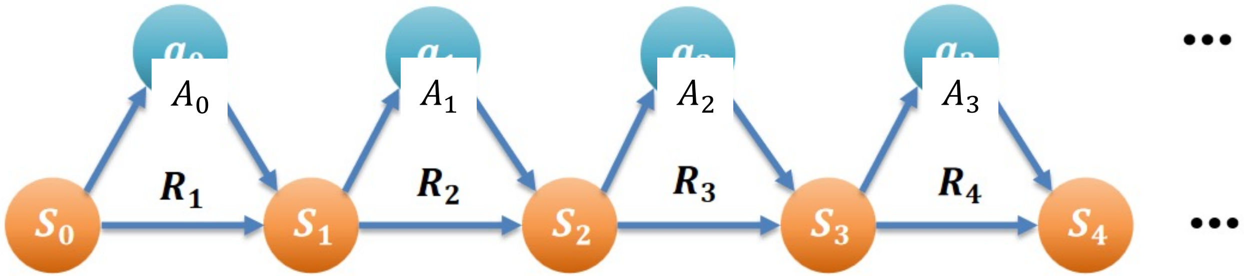


图2：机器人寻路问题

马尔可夫决策过程：如何与环境交互



马尔可夫决策过程刻画了智能体与环境的交互特点，这一交互可用上图简洁概括。如图所示，智能体从初始状态S_0开始，根据策略执行动作A_0，得到奖励值R_1，同时状态转移到S_1，以此类推。于是，可得到一个状态序列$(S_0, S_1, \cdots,)$，该序列称为**轨迹（trajectory）**，轨迹长度可以是无限的，也可以有终止状态S_T。状态序列中包含终止状态的问题叫**分段（episodic）**问题，不包含终止状态的问题叫**持续（continuing）**问题。在分段问题中，一个从初始状态到终止状态的完整轨迹称为一个**片段（episode）**。

本课程讨论的主要是**分段问题**，有时也将动作和奖励记入状态序列中，用$(S_0, A_0, R_1, S_1, A_2, R_2, S_2, \cdots S_T)$来描述一个片段。

马尔可夫决策过程中的策略学习

马尔可夫决策过程$MDP = \{S, A, Pr, R, \gamma\}$对环境进行了描述，那么**智能主体如何与环境交互而完成任务？需要进行策略学习**

对环境中各种因素的说明	
已知的：S, A, R, γ	不一定已知的：Pr
观察到的：$(S_0, a_0, R_1, S_1, a_1, R_2, \cdots, S_T)$	

- **策略函数π：策略函数刻画了智能体选择动作的机制。**策略函数$\pi: S \times A \mapsto [0,1]$，$\pi(s,a)$表示智能体在状态$s$下采取动作$a$的概率。策略函数可以是概率性的，也可以是确定的。**确定的策略函数**指在给定状态s情况下，只有一个动作a使得概率$\pi(s,a)$取值为1。对于确定的策略函数，为了简化符号，记$a = \pi(s)$。

一个好的策略函数应该能够使得智能体在采取了一系列行动后可得到最佳奖励，即最大化每一时刻的回报值$G_t = R_{t+1} + \gamma R_{t+2} + \gamma^2 R_{t+3} + \cdots$。从$G_t$的定义可知，$G_t$要根据一次包含了终止状态的轨迹序列计算所得。

马尔可夫决策过程中的策略学习

由马尔可夫性，未来的状态和奖励只与当前状态相关，与t无关。因此t取任意值该等式均成立，如“逢山开路，遇水搭桥”。

如何进行策略学习：一个好的策略是在当前状态下采取了一个行动后，该行动能够在未来收到最大化的反馈：

$$G_t = R_{t+1} + \gamma R_{t+2} + \gamma^2 R_{t+3} + \cdots$$

为了对策略函数π进行评估，定义

- **价值函数（Value Function）** $V: S \mapsto \mathbb{R}$，其中$V_\pi(s) = \mathbb{E}_\pi[G_t | S_t = s]$，即在第$t$步状态为$s$时，按照策略$\pi$行动后在未来所获得反馈值的期望
- **动作-价值函数(Action-Value Function)** $q: S \times A \mapsto \mathbb{R}$，其中$q_\pi(s,a) = \mathbb{E}_\pi[G_t | S_t = s, A_t = a]$表示在第$t$步状态为$s$时，按照策略$\pi$采取动作$a$后，在未来所获得反馈值的期望

这样，策略学习转换为如下优化问题：

寻找一个最优策略π^*，对任意$s \in S$使得$V_{\pi^*}(s)$值最大

目录

状态价值与动作-状态价值

- **状态-价值函数（State-Value Function）** $V_\pi(s)=\mathbb{E}_\pi[R_{t+1}+\gamma R_{t+2}+\gamma^2 R_{t+3}+\cdots|S_t=s]$，也可简称**状态价值、V值**
- **动作-价值函数 (Action-Value Function)** $q_\pi(s,a)=\mathbb{E}_\pi[R_{t+1}+\gamma R_{t+2}+\gamma^2 R_{t+3}+\cdots|S_t=s,A_t=a]$，也简称**动作价值、q值**

$$V_\pi(s)=\mathbb{E}_\pi[R_{t+1}+\gamma R_{t+2}+\gamma^2 R_{t+3}+\cdots|S_t=s]$$

$$=\mathbb{E}_{a\sim\pi(s,\cdot)}\left[\mathbb{E}_\pi[R_{t+1}+\gamma R_{t+2}+\gamma^2 R_{t+3}+\cdots|S_t=s,A_t=a]\right]$$

$$=\sum_{a\in A}\underbrace{\pi(s,a)}_{\text{采取动作}a\text{的概率}}\times\underbrace{q_\pi(s,a)}_{\text{采取动作}a\text{后带来的回报期望}}$$

$$=\sum_{a\in A}\pi(s,a)q_\pi(s,a)$$

状态价值与时间没有关系，只与策略π、在策略π下从某个状态转移到其后续状态所取得的回报以及后续所得回报有关。 **(马尔可夫性质)**

状态价值与动作-状态价值

- **状态价值函数（State - Value Function）** $V_\pi(s)=\mathbb{E}_\pi[R_{t+1}+\gamma R_{t+2}+\gamma^2 R_{t+3}+\cdots|S_t=s]$，也可简称**状态价值 V值**
- **动作-价值函数(Action-Value Function)** $q_\pi(s,a)=\mathbb{E}_\pi[R_{t+1}+\gamma R_{t+2}+\gamma^2 R_{t+3}+\cdots|S_t=s,A_t=a]$，也简称**动作价值 q值**

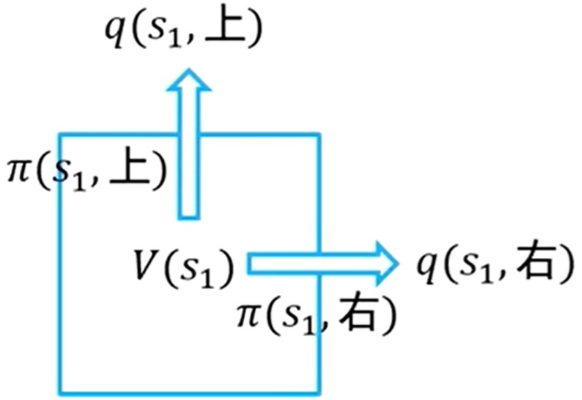
$$q_\pi(s,a)=\mathbb{E}_\pi[R_{t+1}+\gamma R_{t+2}+\gamma^2 R_{t+3}+\cdots|S_t=s,A_t=a]$$
$$=\mathbb{E}_{s'\sim P(\cdot|s,a)}[R(s,a,s')+\gamma\mathbb{E}_\pi[R_{t+2}+\gamma R_{t+3}+\cdots|S_{t+1}=s']]$$
$$=\sum_{s'\in S}\underbrace{P(s'|s,a)}_{\text{在状态}s\text{采取行动}a\text{进入状态}s'\text{的概率}}\times[\underbrace{R(s,a,s')}_{\text{在}s\text{采取}a\text{进入}s'\text{得到的即时奖励}}+\gamma\times\underbrace{V_\pi(s')}_{\text{在}s'\text{获得的未来回报}}]$$
$$=\sum_{s'\in S}P(s'|s,a)\,[R(s,a,s')+\gamma V_\pi(s')]$$

动作-价值函数取值同样与时间没有关系，而是与瞬时奖励和下一步的状态和动作有关。

价值函数与动作-价值函数的关系：以状态s1的计算为例

$$V_\pi(s) = \sum_{a \in A} \pi(s,a) q_\pi(s,a)$$

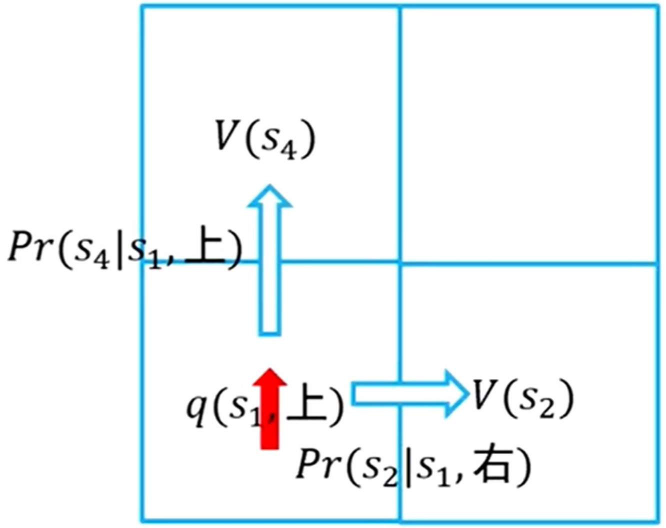
$$V_\pi(s_1) = \pi(s_1,\text{上}) q_\pi(s_1,\text{上}) + \pi(s_1,\text{右}) q_\pi(s_1,\text{右})$$



不同动作下的反馈累加

$$q_\pi(s,a) = \sum_{s' \in S} Pr(s'|s,a)\,[R(s,a,s') + \gamma V_\pi(s')]$$

$$q_\pi(s_1,\text{上}) = Pr(s_4|s_1,\text{上})[R(s_1,\text{上},s_4) + \gamma V_\pi(s_4)]$$



动作确定时状态转移后的反馈结果

贝尔曼方程

初始的reward

状态价值函数的贝尔曼方程

$$V(s) = r(s) + \gamma \sum_{s' \in S} P(s'|s)V(s')$$

所有跳转至状态S’的方法的概率与价值的乘积（方法期望价值）的和

- 状态价值函数的贝尔曼方程描述了状态价值函数的递推关系，是研究强化学习问题的重要手段。
- 其中，价值函数的贝尔曼方程描述了当前状态价值函数和其后续状态价值函数之间的关系，即当前状态价值函数等于**即时奖励**的期望加上**后续状态的（折扣）价值函数**的期望。
- 在实际中，需要计算得到最优策略以指导智能体在当前状态如何选择一个可获得最大回报的动作。**求解最优策略的一种方法就是去求解最优的价值函数或最优的动作-价值函数**。一旦找到了最优的价值函数或动作-价值函数，自然而然也就找到了对应的最优策略。

贝尔曼方程，又叫动态规划方程，是以Richard Bellman命名的，表示动态规划问题中相邻状态关系的方程。某些决策问题可以按照时间或空间分成多个阶段，每个阶段做出决策从而使整个过程取得效果最优的多阶段决策问题，可以用动态规划方法求解。某一阶段最优决策的问题，通过贝尔曼方程转化为下一阶段最优决策的子问题，从而初始状态的最优决策可以由终状态的最优决策(一般易解)问题逐步迭代求解。

贝尔曼方程

价值函数的贝尔曼方程

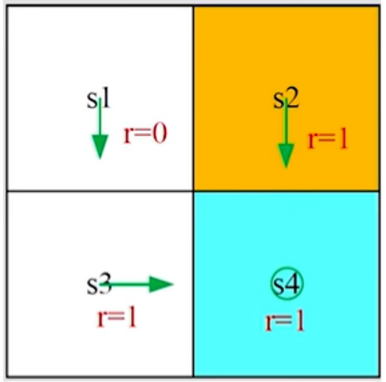
$$V_\pi(s) = \mathbb{E}_{a\sim\pi(s,\cdot)}\,\mathbb{E}_{s'\sim P(\cdot|s,a)}[R(s,a,s') + \gamma V_\pi(s')]$$
$$=r(s)+\gamma\sum_{s'\in\mathbf{S}} P(s'|s)V_\pi(s')$$

贝尔曼方程：在知晓奖励函数和状态转移矩阵的情况下即可计算价值函数的解析解。

If there are four states, $v_\pi = r_\pi + \gamma P_\pi v_\pi$ can be written out as

$$\underbrace{\begin{bmatrix} v_\pi(s_1) \\ v_\pi(s_2) \\ v_\pi(s_3) \\ v_\pi(s_4) \end{bmatrix}}_{v_\pi} = \underbrace{\begin{bmatrix} r_\pi(s_1) \\ r_\pi(s_2) \\ r_\pi(s_3) \\ r_\pi(s_4) \end{bmatrix}}_{r_\pi} + \gamma \underbrace{\begin{bmatrix} p_\pi(s_1|s_1) & p_\pi(s_2|s_1) & p_\pi(s_3|s_1) & p_\pi(s_4|s_1) \\ p_\pi(s_1|s_2) & p_\pi(s_2|s_2) & p_\pi(s_3|s_2) & p_\pi(s_4|s_2) \\ p_\pi(s_1|s_3) & p_\pi(s_2|s_3) & p_\pi(s_3|s_3) & p_\pi(s_4|s_3) \\ p_\pi(s_1|s_4) & p_\pi(s_2|s_4) & p_\pi(s_3|s_4) & p_\pi(s_4|s_4) \end{bmatrix}}_{P_\pi} \underbrace{\begin{bmatrix} v_\pi(s_1) \\ v_\pi(s_2) \\ v_\pi(s_3) \\ v_\pi(s_4) \end{bmatrix}}_{v_\pi}.$$

注意：矩阵形式的贝尔曼方程这里是$V_\pi(s)$,因为矩阵形式对所有状态（s_1, s_2，s_3, s_4）一起计算



$$\begin{bmatrix} v_\pi(s_1) \\ v_\pi(s_2) \\ v_\pi(s_3) \\ v_\pi(s_4) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \gamma \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_\pi(s_1) \\ v_\pi(s_2) \\ v_\pi(s_3) \\ v_\pi(s_4) \end{bmatrix}$$

基于价值的强化学习

回顾强化学习问题的定义：给定一个马尔可夫决策过程$MDP = (S, A, P, R, \gamma)$，强化学习会寻找一个**最优策略$\pi^*$**，在策略$\pi^*$作用下使得任意状态$s \in S$对应的价值$V_{\pi^*}(s)$最大。

为了求解最优策略π^*,下图中展示了一种思路：从一个任意的策略开始，**首先计算该策略下状态价值V（或动作-价值q），然后根据价值函数调整改进策略使其更优，不断迭代这个过程直到策略收敛。**通过策略计算价值函数的过程叫做**策略评估（policy evaluation）**，通过价值函数优化策略的过程叫做**策略优化（policy improvement）**，策略评估和策略优化交替进行的强化学习求解方法叫做**通用策略迭代（Generalized Policy Iteration，GPI）**。

目录

策略优化定理 与 贝尔曼最优公式

在讨论如何优化策略之前，首先需要明确什么是“更好”的策略。分别给出π和π'两个策略，如果对于任意状态$s \in S$，有$V_\pi(s) \le V_{\pi'}(s)$，那么可以认为策略π'不比策略π差，可见“更优”策略是一个**偏序关系**。

可以证明，给定任意给定状态$s \in S$，如果两个策略π和π'满足如下条件：

$$q_\pi\big(s, \pi'(s)\big) \ge q_\pi(s, \pi(s))$$

那么对于该任意给定状态$s \in S$，有

$$V_{\pi'}(s) \ge V_\pi(s)$$

即策略π'不比策略π差。这个结论称为**策略优化定理（Policy Improvement Theorem）**。

*注意：$q_\pi\big(s, \pi'(s)\big)$的含义并不是在当前状态$s$下按照策略$\pi'$行动的回报期望，而是在当前状态$s$下按照策略$\pi'$去选择动作$\pi'(s)$，但是只改变这一个动作（后续状态的所有动作仍然按照原有策略π来选择）所得到的回报期望。

贝尔曼最优公式

$$v = f(v) = \max_{\pi}(r_\pi + \gamma P_\pi v)$$

收缩映射定理：

Theorem (Contraction Mapping Theorem)

For any equation that has the form of $x = f(x)$, if f is a contraction mapping, then

- **Existence**: *there exists a fixed point x^* satisfying $f(x^*) = x^*$.* v是一个不动点
- **Uniqueness**: *The fixed point x^* is unique.* v是唯一的
- **Algorithm**: *Consider a sequence $\{x_k\}$ where $x_{k+1} = f(x_k)$, then $x_k \to x^*$ as $k \to \infty$. Moreover, the convergence rate is exponentially fast.*

该最优化问题需要用迭代方法求解

贝尔曼最优公式与贪心最优策略

Theorem (Greedy Optimal Policy)

For any $s \in \mathcal{S}$, the deterministic greedy policy

$$\pi^*(a|s) = \begin{cases} 1 & a = a^*(s) \\ 0 & a \neq a^*(s) \end{cases} \tag{1}$$

is an optimal policy solving the BOE. Here,

BOE: Bellman Optimality Equation (贝尔曼最优方程)

$$a^*(s) = \arg\max_a q^*(a, s),$$

找到使得q最大的动作a，该动作为最优动作

where $q^*(s, a) := \sum_r p(r|s, a)r + \gamma \sum_{s'} p(s'|s, a)v^*(s')$.

引入q，在状态s下采用控制动作a，所能达到的最大期望总奖励

计算q值，可以通过找q值最大的动作来将其定义为该状态下的最优动作

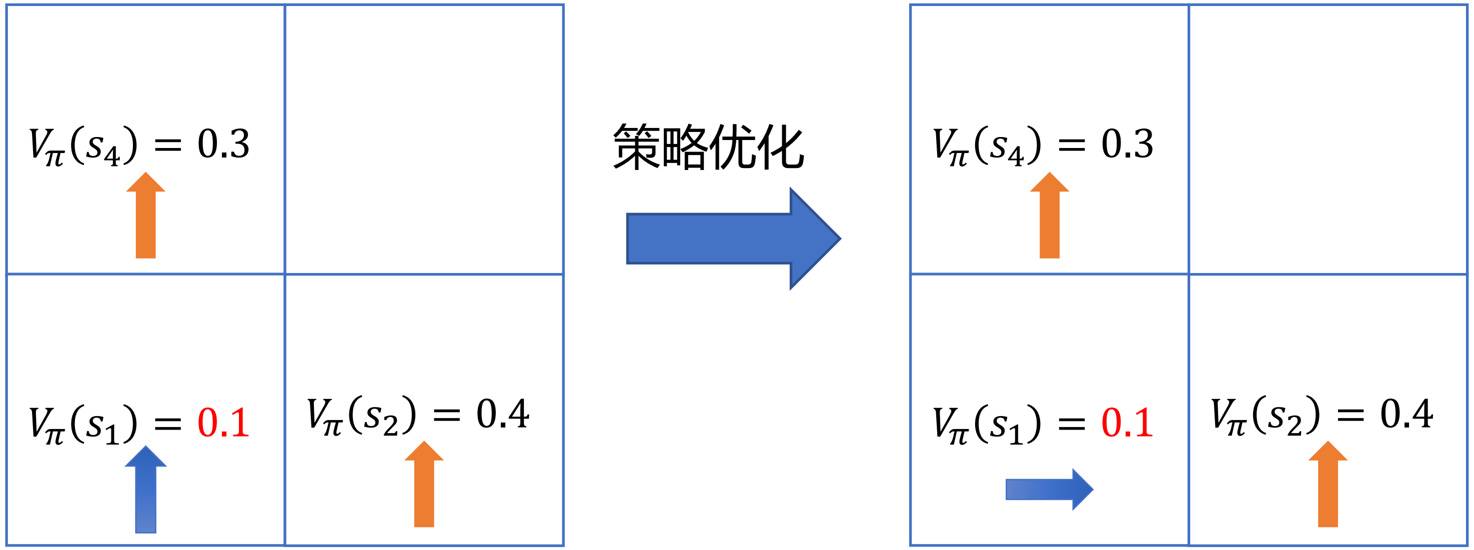
策略优化例子

问题：智能体目前在状态s_1，那么下一步是采取“向上移动一个方格”还是“向右移动一个方格”？

计算状态s_1选择这两个不同动作后分别所得动作-价值函数取值：

$$q_\pi(s_1,\text{上}) = \sum_{s'\in S} \mathrm{P}(s'|s_1,\text{上})\,[R(s_1,\text{上},s') + \gamma V_\pi(s')]$$
$$= 1\times(0+0.99\times0.3) + 0\times\cdots = 0.297$$

$$q_\pi(s_1,\text{右}) = \sum_{s'\in S} \mathrm{P}(s'|s_1,\text{右})\,[R(s_1,\text{右},s') + \gamma V_\pi(s')]$$
$$= 1\times(0+0.99\times0.4) + 0\times\cdots = 0.396$$



策略评估

假定当前策略为π，策略评估指的是根据策略π来计算相应的价值函数V_π或动作-价值函数q_π。

常见策略评估方法：

① **动态规划 (Dynamic Programming，DP)**

② **蒙特卡洛 (Monte Carlo，MC)**

③ **时序差分 (Temporal Difference，TD)**

怎么知道你当前的策略好不好?

怎么知道你当前这一步玩的好不好?

策略优化：根据V_π优化π

策略评估：根据π计算V_π

实际中V_π是未知的，我们需要根据策略评估方法去评估我们选择的策略π，从而得到V_π的估计

策略评估：动态规划

基于动态规划的价值函数更新：使用迭代的方法求解贝尔曼方程组

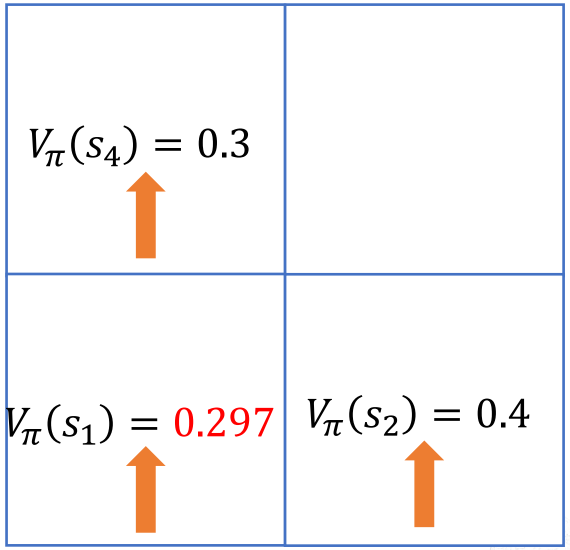
初始化V_π函数
循环
　　枚举$s \in S$
　　　　$V_\pi(s) \leftarrow \sum_{a \in A} \pi(s,a) \boxed{\sum_{s' \in S} Pr(s'|s,a)\,[R(s,a,s') + \gamma V_\pi(s')]}$
直到V_π收敛

$q_\pi(s,a)$ 等同于

更新$V_\pi(s_1)$的值：

$$q_\pi(s_1, \text{上}) = 1\times(0 + 0.99\times0.3) + 0\times(0 + 0.99\times0.4)$$
$$+\ldots = 0.297$$

$$V_\pi(s_1) = 1\times q_\pi(s_1, \text{上}) + 0\times q_\pi(s_1, \text{右}) = 0.297$$



动态规划的缺点：1、智能主体需要事先知道**状态转移概率（一般未知）**；
2、无法处理状态集合大小无限的情况

策略评估：蒙特卡洛采样

基于蒙特卡洛采样的价值函数更新

> 选择不同的起始状态，按照当前策略π采样若干轨迹，记它们的集合为D
> 枚举$s \in S$
> 　　计算D中s每次出现时对应的反馈$G_1, G_2, \cdots, G_k$
> 　　$V_\pi(s) \leftarrow \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} G_i$

假设按照当前策略可样得到以下两条轨迹

$$(s_1, s_4, s_7, s_8, s_9)$$
$$(s_1, s_2, s_3, s_d)$$

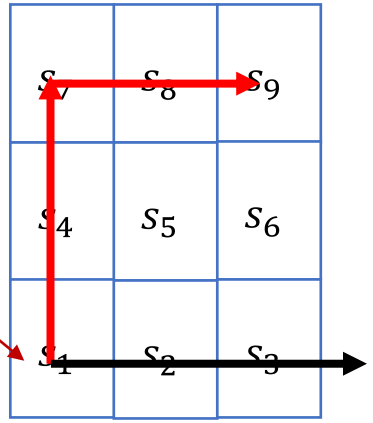
s_1对应的反馈值分别为

$$0 + \gamma \times 0 + \cdots + \gamma^3 \times 1 = 0.970$$
$$0 + \gamma \times 0 + \gamma^2 \times (-1) = -0.980$$

因此估计

$$V(s_1) = \frac{1}{2}(0.970 - 0.980) = -0.005$$

如果是确定的策略，每个起点只会产生一种轨迹，这里的例子是不确定策略（有两个路径）



根据数理统计的知识，期望可以通过样本均值来估计的，这正是**蒙特卡洛方法（Monte-Carlo method）**的核心思想。即**大数定理**指出：对于独立同分布（IID）的样本数据，当样本足够大的时候，样本平均值向期望值收敛。

策略评估：时序差分

随机初始化V_π**函数**

repeat

  $s \leftarrow$ **初始状态**

  repeat

    $a \sim \pi(s,\cdot)$

    执行动作a**，观察奖励**R**和下一个状态**s'

    $V_\pi(s) \leftarrow V_\pi(s) + \alpha[R(s,a,s') + \gamma V_\pi(s') - V_\pi(s)]$

    $s \leftarrow s'$

  until s**是终止状态**

until V_π收敛

输入：策略π
输出：价值函数V_π

更新$V_\pi(s)$的值： $V_\pi(s) \leftarrow (1-\alpha)\underbrace{V_\pi(s)}_{\text{旧的价值函数值}} + \alpha\underbrace{[R(s,a,s') + \gamma V_\pi(s')]}_{\text{学习得到的新价值函数值}}$

策略评估：时序差分

更新$V_\pi(s)$的值： $V_\pi(s) \leftarrow \underbrace{(1-\alpha)V_\pi(s)}_{\text{旧的价值函数值}} + \alpha\underbrace{[R(s,a,s') + \gamma V_\pi(s')]}_{\text{学习得到的新价值函数值}}$

- 由于通过采样进行计算，所得结果可能不准确，因此时序差分法并没有将这个估计值照单全收，而是以α作为权重来接受新的估计值，即把价值函数更新为$(1-\alpha)V_\pi(s) + \alpha[R + \gamma V_\pi(s')]$，对这个式子稍加整理就能得到：

$$V_\pi(s) \leftarrow V_\pi(s) + \alpha[R + \gamma V_\pi(s') - V_\pi(s)]$$

$R + \gamma V_\pi(s')$为时序差分目标
$R + \gamma V_\pi(s') - V_\pi(s)$为时序差分偏差。

TD方法可以在每一步之后立即更新值函数，而不需要等待整个回合结束

- 时序差分法和蒙特卡洛法都是通过采样若干个片段来进行价值函数更新的，但是时序差分法并非使用一个片段中的终止状态所提供的实际回报值来估计价值函数，而是根据下一个状态的价值函数来估计，这样就克服了**采样轨迹的稀疏性可能带来样本方差较大**的不足，同时也**缩短了反馈周期**。

策略评估：时序差分 举例

随机初始化V_π函数

repeat

  $s \leftarrow$ 初始状态

  repeat

    $a \sim \pi(s,\cdot)$

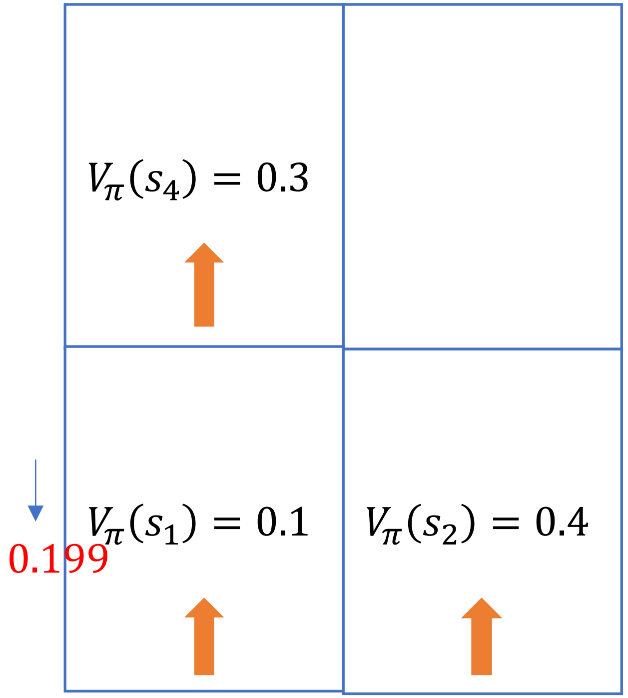
    执行动作a，观察奖励R和下一个状态s'

    $V_\pi(s) \leftarrow V_\pi(s) + \alpha[R(s,a,s') + \gamma V_\pi(s') - V_\pi(s)]$

    $s \leftarrow s'$

  until s是终止状态

until V_π收敛



假设$\alpha = 0.5$，更新$V_\pi(s_1)$的值：

从$\pi(s_1,\cdot)$ 中采样得到动作a = 上

从$\Pr(\cdot\,|s_1,\text{上})$中采样得到下一步状态$s' = s_4$

$$V_\pi(s_1) \leftarrow V_\pi(s_1) + \alpha[R(s_1,\text{上},s_4) + \gamma V_\pi(s_4) - V_\pi(s_1)]$$
$$= 0.1 + 0.5\times[0 + 0.99\times 0.3 - 0.1] = 0.199$$

在对片段进行采样的同时，不断以上述方法更新当前状态的价值函数，不断迭代直到价值函数收敛为止。

策略评估 总结

随机初始化策略π

repeat

$q_\pi(s,a)$ $\leftarrow$ Policy-Evaluation(π)　// 策略评估，可使用**DP**、**MC**、**TD**等算法

for each $s \in S$ do

$\pi(s) = \text{argmax}_a q_\pi(s,a)$

end

until π收敛

基于此我们得到RL学习算法： Policy-Iteration

存在的问题：

- Policy-Evaluation需要迭代求解，影响执行效率
- 随着迭代次数增多， q_π变化会越来越小

从动态规划策略评估引出价值迭代算法

在**动态规划**策略评估方法中，（**动态规划是基于马尔科夫决策过程和转态转移概率的**）
每次迭代中只对一个状态进行策略评估和策略优化，
可得到价值迭代算法：

输入：**马尔可夫决策过程** $MDP = (S, A, P, R, \gamma)$
输出：策略π

随机初始化π
repeat
$\boxed{q_\pi(s,a) \leftarrow \text{Policy-Evaluation}(\pi)}$
for each $s \in S$ do
$\pi(s) = \text{argmax}_a q_\pi(s,a)$
end
until π收敛

策略迭代算法 Policy-Iteration

随机初始化V_π
repeat
for each $s \in S$ do
$V_\pi(s) \leftarrow \max_a \sum_{s' \in S} P(s'|s,a)\,[R(s,a,s') + \gamma V_\pi(s')]$
end
until V_π收敛
$\pi(s) := \text{argmax}_a \sum_{s' \in S} P(s'|s,a)\,[R(s,a,s') + \gamma V_\pi(s')]$

价值迭代算法 Value-Iteration

价值迭代（Value Iteration）算法

随机初始化V_π

repeat

for each $s \in S$ do

$V_\pi(s) \leftarrow \max_a \sum_{s' \in S} P\,(s'|s,a)\,[R(s,a,s') + \gamma V_\pi(s')]$

end

until V_π收敛

$\pi(s) := \mathrm{argmax}_a \sum_{s' \in S} P\,(s'|s,a)\,[R(s,a,s') + \gamma V_\pi(s')]$

第4行实际上包含两步，即：

$$\pi(s) \leftarrow \mathrm{argmax}_\mathrm{a} q_\pi(s,a)$$

$$V_\pi(s) \leftarrow q_\pi(s,\pi(s))$$

其中，$q_\pi(s,a) = \sum_{s'} P(s'|s,a)[R(s,a,s') + \gamma V_\pi(s')]$。这两步分别对应了策略优化和策略评估两个阶段。也就是说，交替进行一次策略优化和一次策略评估。

价值迭代（Value Iteration）算法

以机器人寻路问题为例，假设价值函数的初值如中间图片所示，则完成值迭代算法中一次外层循环后，价值函数的值如最右侧图片所示。

以状态s_8为例：

$q_\pi(s_8,右)$

$$=\sum_{s'} P(s'|s_8,右)[R(s_8,右,s')+\boldsymbol{\gamma V_\pi(s')}]$$

$$=1\times(1+0.99\times0)+0\times\cdots=1$$

$q_\pi(s_8,上)$

$$=\sum_{s'} P(s'|s_8,上)[R(s_8,上,s')+\boldsymbol{\gamma V_\pi(s')}]$$

$$=1\times(-1+0.99\times0)+0\times\cdots=-1$$

$$\boldsymbol{V(s_8)=max_a q_\pi(s_8,a)=max\{1,-1\}}$$

因此状态s_8的价值函数更新为1，同理可更新其他状态的价值函数。

s_7	s_8	s_9
s_4	s_5	s_6
s_1	s_2	s_3

0	0	0
0	0	0
0	0	0

0	1	0
0	0	1
0	0	0

价值迭代（Value Iteration）算法

第2次外层循环后

0.99	1	0
0	0.99	1
0	0	0.99

第3次外层循环后

0.99	1	0
0.98	0.99	1
0	0.98	0.99

第5次外层循环后

0.99	1	0
0.98	0.99	1
0.97	0.98	0.99

$\rightarrow$ s_7	$\rightarrow$ s_8	s_9
$\uparrow$ s_4	$\uparrow$ s_5	$\uparrow$ s_6
$\uparrow$ s_1	$\uparrow$ s_2	$\uparrow$ s_3

q_π相同情况下，
优先取动作"上"

轨迹:（ s_1, s_4, s_7, s_8, s_9 ）

Q学习算法

输入：**马尔可夫决策过程** $MDP = (S, A, P, R, \gamma)$
输出：策略π

初始化V_π函数
循环
　　初始化s为初始状态
　　循环
　　　　$a \sim \pi(s,\cdot)$
　　　　执行动作a，观察奖励R和下一个状态s'
　　　　更新$V_\pi(s) \leftarrow V_\pi(s) + \alpha[R + \gamma V_\pi(s') - V_\pi(s)]$

　　　　$s \leftarrow s'$
　　直到s是终止状态
直到V_π收敛

将策略迭代中的"策略评估"步骤替换为基于同策略（on-policy）的时序差分学习

等价于优化Bellman Equation

$$V(s) = r(s) + \gamma \sum_{s' \in S} P(s'|s)V(s')$$

Q学习算法

输入：**马尔可夫决策过程** $MDP = (S, A, P, R, \gamma)$
输出：策略π

初始化q_π函数
循环
    初始化s为初始状态
    循环
        $a \sim \pi(s,\cdot)$
        执行动作a，观察奖励R和下一个状态s'
        ~~更新$V_\pi(s) \leftarrow V_\pi(s) + \alpha[R + \gamma V_\pi(s') - V_\pi(s)]$~~ $a' \sim \pi(s',\cdot)$
        更新$q_\pi(s,a) \leftarrow q_\pi(s,a) + \alpha[R + \gamma\, q_\pi(s',a') - q_\pi(s,a)]$
        $s \leftarrow s'$
    直到s是终止状态
直到q_π收敛

等价于下式：

$q_\pi(s,a) \leftarrow (1-\alpha)q_\pi(s,a) + \alpha[R + \gamma\, q_\pi(s',a')]$

直接记录和更新动作-价值函数q_π，也叫SARSA (State-Action-Reward-State-Action)

Q学习算法

输入：**马尔可夫决策过程** $MDP = (S, A, P, R, \gamma)$
输出：策略π

直接找最佳动作！！

初始化q_π函数
循环
　　初始化s为初始状态
　　循环
　　　　~~$a \sim \pi(s,\cdot)$~~　$\boxed{a = \mathrm{argmax}_{a'} q_\pi(s, a')}$
　　　　执行动作a，观察奖励R和下一个状态s'
　　　　~~更新$V_\pi(s) \leftarrow V_\pi(s) + \alpha[R + \gamma V_\pi(s') - V_\pi(s)]$~~
　　　　更新$q_\pi(s,a) \leftarrow q_\pi(s,a) + \alpha\left[R + \gamma \max_{a'} q_\pi(s', a') - q_\pi(s,a)\right]$
　　　　$s \leftarrow s'$
　　直到s是终止状态
直到q_π收敛

等价于下式：

$$\boxed{q_\pi(s,a) \leftarrow (1-\alpha) q_\pi(s,a) + \alpha\left[R + \gamma \max_{a'} q_\pi(s', a')\right]}$$

Q学习中直接记录和更新动作-价值函数q_π而不是价值函数V_π，这是因为策略优化要求已知动作-价值函数q_π，如果算法仍然记录价值函数V_π，在不知道状态转移概率的情况下将无法求出q_π。

等价于优化Bellman Optimality Equation　$\max_\pi(r_\pi + \gamma P_\pi v)$

Q学习算法

输入：**马尔可夫决策过程** $MDP = (S, A, P, R, \gamma)$
输出：策略π

直接找最佳动作！！

初始化q_π函数
循环
　　初始化s为初始状态
　　循环
　　　　~~$a \sim \pi(s,\cdot)$~~ $\boxed{a = \mathrm{argmax}_{a'} q_\pi(s,a')}$
　　　　执行动作a，观察奖励R和下一个状态s'
　　　　~~更新$V_\pi(s) \leftarrow V_\pi(s) + \alpha[R + \gamma V_\pi(s') - V_\pi(s)]$~~
　　　　更新$q_\pi(s,a) \leftarrow q_\pi(s,a) + \alpha\left[R + \gamma \max_{a'} q_\pi(s',a') - q_\pi(s,a)\right]$
　　　　$s \leftarrow s'$
　　直到s是终止状态
直到q_π收敛

先前的策略优化：$\pi'(s) = \mathrm{argmax}_a q_\pi(s,a)$

等价于下式：

$$\boxed{q_\pi(s,a) \leftarrow (1-\alpha) q_\pi(s,a) + \alpha\left[R + \gamma \max_{a'} q_\pi(s',a')\right]}$$

Q学习中直接记录和更新动作-价值函数q_π而不是价值函数V_π，这是因为策略优化要求已知动作-价值函数q_π，如果算法仍然记录价值函数V_π，在不知道状态转移概率的情况下将无法求出q_π。于是，**Q学习中，只有动作-价值函数（即q函数）参与计算。**

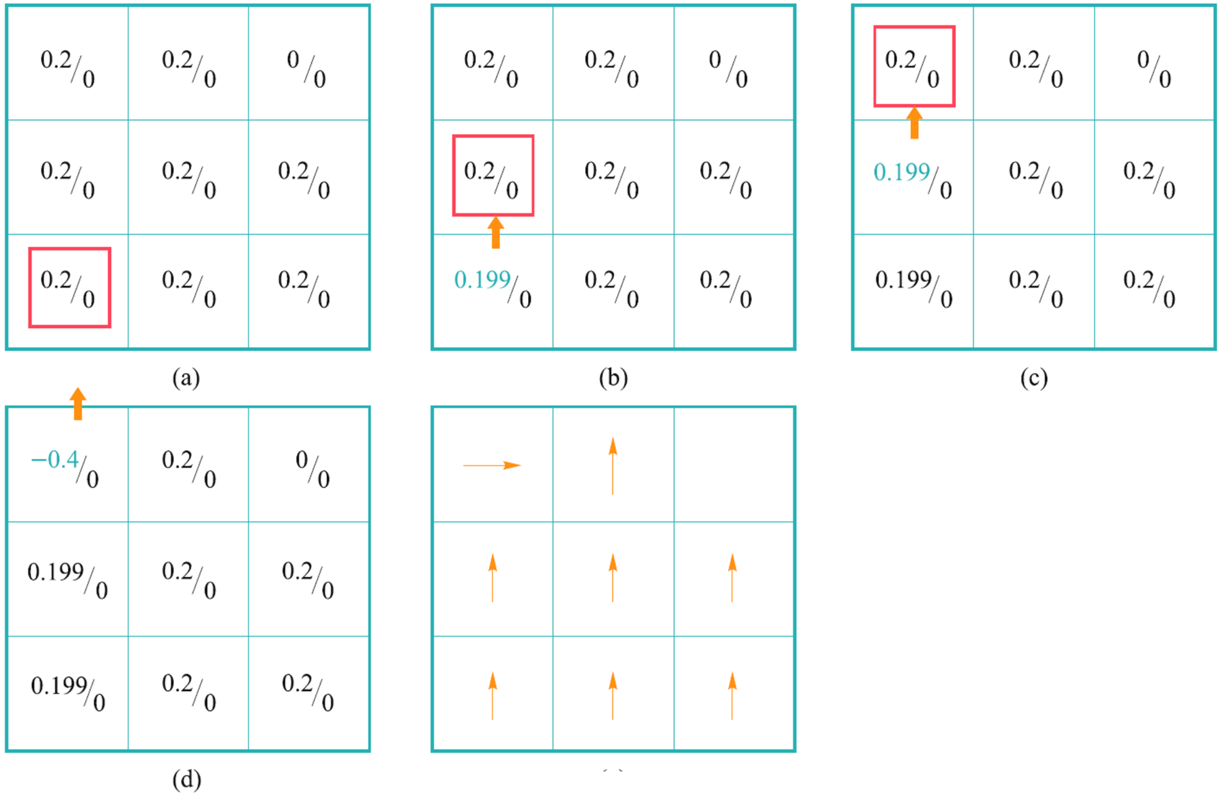
Q学习算法

● 图(a)表示算法的初始状态，其中a/b表示对应状态的动作-价值函数的取值，**斜线上方的a表示$q_\pi(s,上)$，斜线右侧的b表示$q_\pi(s,右)$**

● 图(a)中显示除终止状态外的所有的向上的动作-价值函数值为0.2，所有向右的动作-价值函数值为0。

当然，令这些动作-价值函数的初始值全部为0也是可以的，图(a)中所设置的初始值只是为了让这个例子更容易说明策略学习

a/b表示: **a表示$q_\pi(s,上)$，b表示$q_\pi(s,右)$**



5.10 Q学习的一个片段的执行过程

Q学习算法

图(a)中的红色方框代表了智能体当前所处的位置。从图(a)为出发，在算法第5行，智能体算出应该往上走，执行这个动作，得到奖励$R=0$，并进入下一状态$s'=s_4$（图b），因此可如下更新对应的动作-价值函数：

$$q_\pi(s_1,\text{上}) \leftarrow q_\pi(s_1,\text{上}) + \alpha[R+\gamma \max_{a'} q_\pi(s',a') - q_\pi(s,a)]$$
$$= 0.2 + 0.5 \times [0 + 0.99 \times max\{0, 0.2\} - 0.2]$$

同理算法再执行一次内层循环得到图(c)，接着得到图(d)。这个过程中每一步都通过后续状态的动作-价值函数更新当前状态的动作-价值函数，图(b)-(c)都没有对策略产生影响。

当智能体在图(d)中到达了损坏状态s_d，一个负的奖励（即奖励为-1）使$q_\pi(s_7,\text{上})$变为负值，此时策略$\pi(s_7)$从“向上移动一个方格”变成了“向右移动一个方格”，至此智能体完成了一个片段（一次外层循环）的更新。

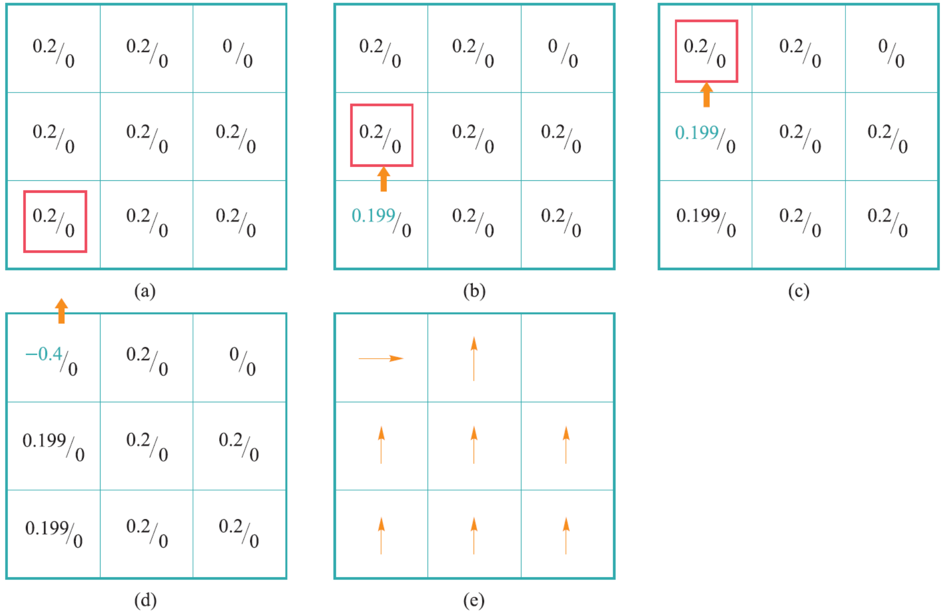
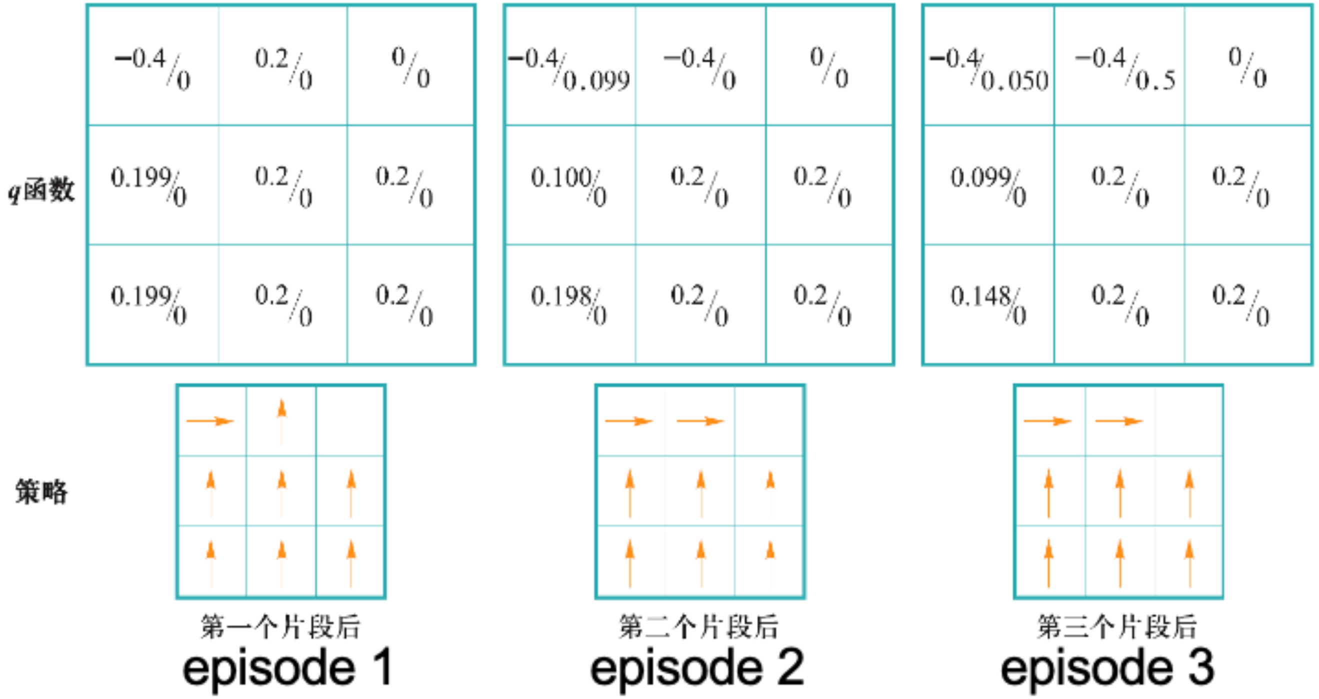


图 6.10　Q 学习的一个片段的执行过程

Q学习算法

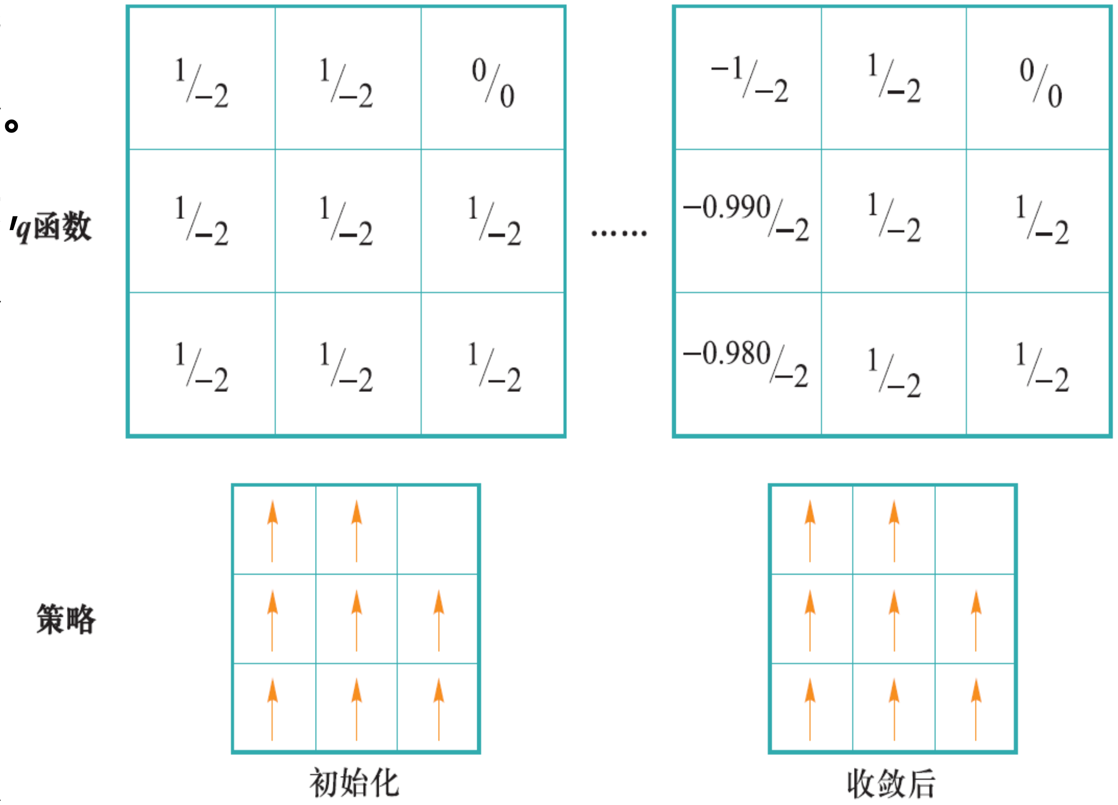


右图展示了Q学习算法执行三个episode的过程，从第二个片段结束时起，算法已经学习得到了沿着轨迹$(s_1, s_4, s_7, s_8, s_9)$到达目标状态$s_9$的策略。实际上，虽然此时动作-价值函数尚未收敛，但此后策略已经不会再发生变化了。

探索与利用

如果将动作-价值函数初始化为$1/-2$，使智能体更倾向于向上移动一个方格而非向右一个方格。在这样初始策略下，Q学习执行过程如右图所示，可见即使在Q学习算法收敛以后，所得到的策略仍然不能使得机器人抵达目标状态s_9，而是沿着轨迹(s_1, s_4, s_7, s_d)导致机器人被损坏。

出现此问题的原因是$q_\pi(\cdot, 右)$的初始值太小，导致机器人被损坏产生的-1奖励不足以推动智能体来改变策略。既然外部刺激不足以使机器人尝试新的策略，那么不妨从内部入手为智能体改变固有策略来添加一个探索的动力。



动作－价值函数初始化为 1/−2 时 Q 学习算法的执行过程

探索与利用

探索（exploration）和利用（exploitation）之间存在对立关系

使用估计奖励值最大的赌博机（**exploitation**）

探索未知奖励值的另外赌博机（**exploration**）

贪心算法

ϵ-贪心算法

探索与利用

ϵ贪心（ϵ-greedy）策略

$$\epsilon\text{-}greedy_\pi(s)=\begin{cases}\text{argmax}_a q_\pi(s,a), & \text{以}1-\epsilon\text{的概率}\\ \text{随机的}a\in A\ , & \text{以}\epsilon\text{的概率}\end{cases}$$

初始化q_π函数
循环
初始化s
循环

用ϵ贪心（ϵ-greedy）策略
代替$a=\text{argmax}_{a'}q_\pi(s,a')$

$\boxed{a=\text{argmax}_{a'}q_\pi(s,a')}$

执行动作a，观察奖励R和下一个状态s'

更新$q_\pi(s,a)\leftarrow q_\pi(s,a)+\alpha\left[R+\gamma\max_{a'}q_\pi(s',a')-q_\pi(s,a)\right]$

$s\leftarrow s'$

直到s是终止状态

直到q_π收敛

在Q学习中引入探索（exploration）与利用（exploitation）机制。这一机制用用ϵ贪心（ϵ-greedy）策略来代替$a=\text{argmax}_{a'}q_\pi(s,a')$。用$\epsilon$贪心（$\epsilon$-greedy）策略定义如下：在状态s，以$1-\epsilon$的概率来选择带来最大回报的动作，或者以$\epsilon$的概率来随机选择一个动作。

探索与利用

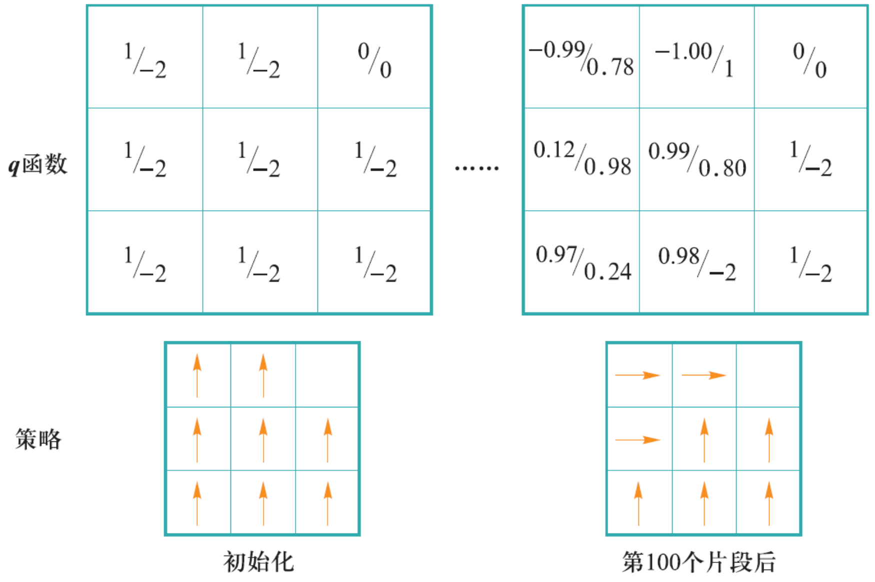
使用 ϵ 贪心算法进行探索的 Q 学习

函数： EpsGreedy
输入： 状态 s，动作－价值函数 q_π，参数 ϵ
输出： 动作 a

$n \sim \mathrm{uniform}(0,1)$
if $n < \epsilon$ **then**
  $a \leftarrow$ 从 A 中随机选择
else
  $a \leftarrow \arg\max_{a'} q_\pi(s, a')$
end

函数： QLearning
输入： 马尔可夫决策过程 MDP $=(S, A, P, R, \gamma)$
输出： 策略 π

随机初始化 q_π
repeat
  $s \leftarrow$ 初始状态
  repeat
    $a \leftarrow$ EesGreedy(s, q_π, ϵ)
    执行动作 a，观察奖励 R 和下一个状态 s'
    $q_\pi(s,a) \leftarrow q_\pi(s,a) + \alpha[R + \gamma \max_{a'} q_\pi(s', a') - q_\pi(s,a)]$
    $s \leftarrow s'$
  until s 是终止状态
until q_π 收敛
$\pi(s) := \arg\max_a q(s,a)$



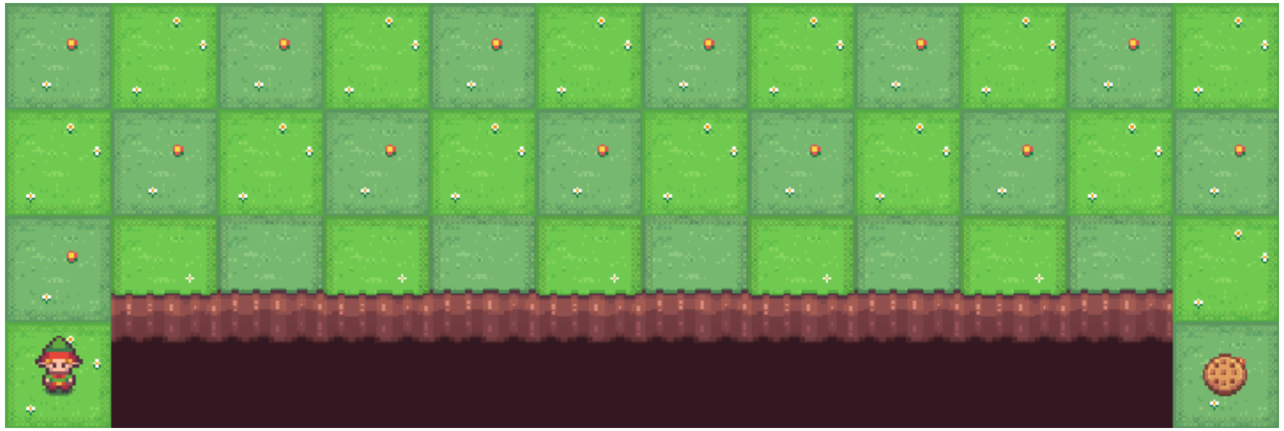
使用 ϵ 贪心策略进行探索的 Q 学习的执行过程

从上图可知，算法在执行了100个片段后，得到了经过轨迹$(s_1, s_4, s_5, s_8, s_9)$到达目标状态的策略。由于$\epsilon$贪心策略具有概率性，因此图中的结果并不是确定的，有可能经过100个片段仍不能得到一个合适的策略，且在图中也能发现存在还没有被访问过的状态s_3。但随着迭代次数的增加，算法探索到最优策略的可能性也会显著增加，通过适当增大参数ϵ的值也能够促进算法乐于探索。

Q学习算法实例 CliffWalking悬崖行走

Action

- 0: 上
- 1: 右
- 2: 下
- 3: 左



State

- 4x12 矩阵
- [3, 0] 最左下角起点
- [3, 11] 右下角终点
- [3, 1..10] 最下一行从1-10格为悬崖陷阱

Action Space	Discrete(4)
State Space	Discrete(48)

Reward

- 每一步都会有-1的奖励，跌落悬崖有-100的奖励

代码结构总览

- CliffWalking - SARSA/Q-learning
  - main.py
    - Hyper Parameters
    - Training Process
    - Test Process
  - agent.py
    - Members
      - Q-Table (***pandas.DataFrame***)
      - Parameters
    - Methods
      - select_action() (***ε-greedy***)
      - learn() (***update Q-table***)
      - save_q_table() / load_q_table() (***.csv***)

on policy与off-policy

SARSA (on-policy)

学习策略和行为策略相同

- 行为策略：ε-greedy
- 学习策略：ε-greedy

Initialize $Q(s, a)$ arbitrarily
Repeat (for each episode):
  Initialize S
  Choose A from S using policy derived from Q (e.g., ε-greedy)
  Repeat (for each step of episode):
    Take action A, observe R, S'
    Choose A' from S' using policy derived from Q (e.g., ε-greedy)
    $Q(S, A) \leftarrow Q(S, A) + \alpha[R + \gamma Q(S', A') - Q(S, A)]$
    $S \leftarrow S'$; $A \leftarrow A'$;
  until S is terminal

Q-learning (off-policy)

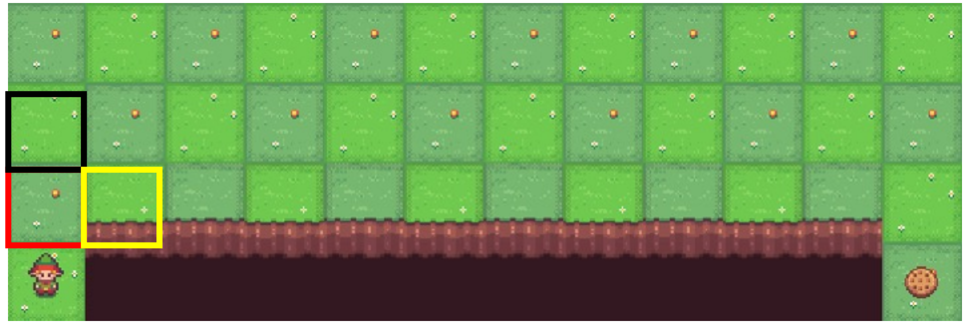
学习策略和行为策略不同

- 行为策略：ε-greedy
- 学习策略：最大化 Q 函数

Initialize $Q(s, a)$ arbitrarily
Repeat (for each episode):
  Initialize S
  Repeat (for each step of episode):
    Choose A from S using policy derived from Q (e.g., ε-greedy)
    Take action A, observe R, S'
    $Q(S, A) \leftarrow Q(S, A) + \alpha[R + \gamma \max_a Q(S', a) - Q(S, A)]$
    $S \leftarrow S'$;
  until S is terminal

on policy与off-policy

SARSA (on-policy)



Q-learning (off-policy)

Initialize $Q(s, a)$ arbitrarily
Repeat (for each episode):
  Initialize S
  Choose A from S using policy derived from Q (e.g., ε-greedy)
  Repeat (for each step of episode):
    Take action A, observe R, S'
    Choose A' from S' using policy derived from Q (e.g., ε-greedy)
    $Q(S, A) \leftarrow Q(S, A) + \alpha[R + \gamma Q(S', A') - Q(S, A)]$
    $S \leftarrow S'$; $A \leftarrow A'$;
  until S is terminal

Initialize $Q(s, a)$ arbitrarily
Repeat (for each episode):
  Initialize S
  Repeat (for each step of episode):
    Choose A from S using policy derived from Q (e.g., ε-greedy)
    Take action A, observe R, S'
    $Q(S, A) \leftarrow Q(S, A) + \alpha[R + \gamma \max_a Q(S', a) - Q(S, A)]$
    $S \leftarrow S'$;
  until S is terminal

Q学习方法的核心——q_table

```python
class Agent:
  def __init__(self, ... ):
    self.q_tab_ = pd.DataFrame(columns=np.arange(self.act_dim_), dtype=np.float16)
    ...

  def save_q_table(self, file_path):
    self.q_tab_.to_csv(file_path)
    print('Q-table saved to "{}"'.format(file_path))

  def load_q_table(self, file_path):
    print('loading Q-table from "{}"'.format(file_path))
    self.q_tab_ = pd.read_csvfile_path, index_col=0, header=0, names=[None, 0, 1, 2, 3])
    print('Q-table loaded!')
```

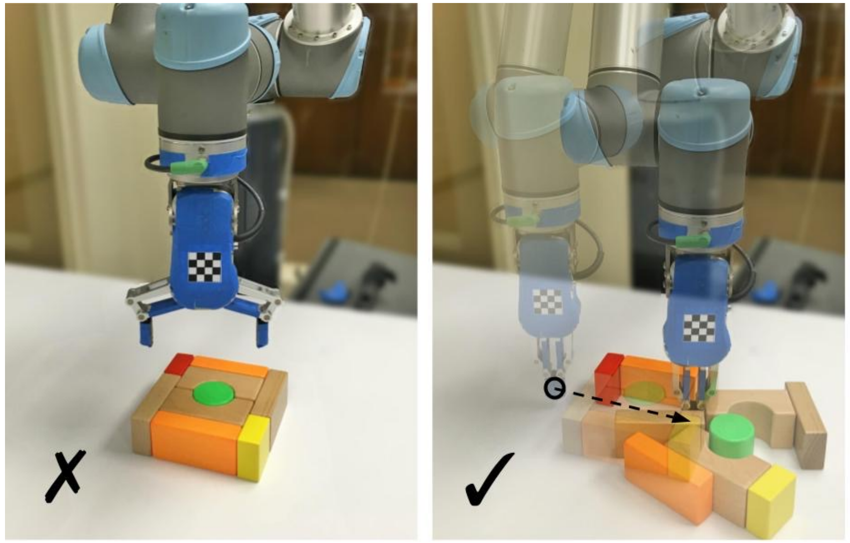
	A	B	C	D	E
1		0	1	2	3
2	(36, {	-7.664356962	-15.61342041	-7.694123283	-7.693071842
3	36	-7.656120901	-17.01068437	-7.659941807	-7.658727695
4	24	-7.488716169	-7.350782471	-7.490020202	-7.496968378
5	25	-7.124733367	-6.981376435	-20.07079396	-7.124786756
6	13	-6.990925399	-6.990341748	-6.991266523	-6.994217257
7	14	-6.700412009	-6.698190073	-6.698361808	-6.701212021
8	15	-6.368743485	-6.366565564	-6.366847847	-6.368627362
9	26	-6.818439898	-6.600067902	-19.14250628	-6.822013243
10	2	-6.647001745	-6.642155266	-6.642302783	-6.642862761
11	3	-6.353653141	-6.351048334	-6.350616203	-6.353741718
12	16	-5.999468946	-5.997408597	-5.999115369	-6.003915488
13	28	-5.892364933	-5.759779413	-20.87596597	-5.90158946
14	29	-5.39499125	-5.288814012	-13.73746685	-5.423102958
15	17	-5.59019319	-5.585472918	-5.586260222	-5.59006599
16	18	-5.131872579	-5.128473004	-5.129937568	-5.128335551
17	19	-4.624321304	-4.619684917	-4.619560756	-4.627704493
18	7	-4.811033117	-4.809569618	-4.811106293	-4.809006624
19	8	-4.323064683	-4.323760683	-4.323466425	-4.331985324
20	9	-3.803057559	-3.796662609	-3.797573621	-3.79594759
21	20	-4.055526901	-4.050484874	-4.050587063	-4.051708733
22	10	-3.235079506	-3.230451421	-3.231130851	-3.231338969
23	22	-2.709890911	-2.69918533	-2.698955998	-2.707034012
24	21	-3.421837274	-3.412381131	-3.412421987	-3.416055405
25	32	-3.69280949	-3.523728955	-12.84052242	-3.717977642
26	31	-4.305954139	-4.232710947	-15.58826025	-4.278091061
27	12	-7.250527256	-7.250381854	-7.250166559	-7.253130957
28	0	-7.084272148	-7.08491206	-7.084840695	-7.085067153
29	1	-6.894724797	-6.892134361	-6.891356756	-6.894451004
30	4	-6.027327186	-6.022056629	-6.023548083	-6.027534686
31	27	-6.409808373	-6.190936333	-22.55240816	-6.423227557
32	5	-5.662919678	-5.656870222	-5.657204925	-5.657222938
33	6	-5.255794839	-5.252670062	-5.256256682	-5.252883592
34	30	-4.874706503	-4.761131626	-14.72340255	-4.851318103
35	34	-2.005557554	-1.90175027	-12.0064864	-2.065439659
36	33	-2.82488332	-2.716195212	-18.37441519	-2.806121284
37	11	-2.658119135	-2.64477383	-2.644856005	-2.654422566
38	23	-1.951956828	-1.928866753	-1.903510316	-1.940118114
39	35	-1.234805735	-1.12032612	-1	-1.191239915
40	47	0	0	0	0

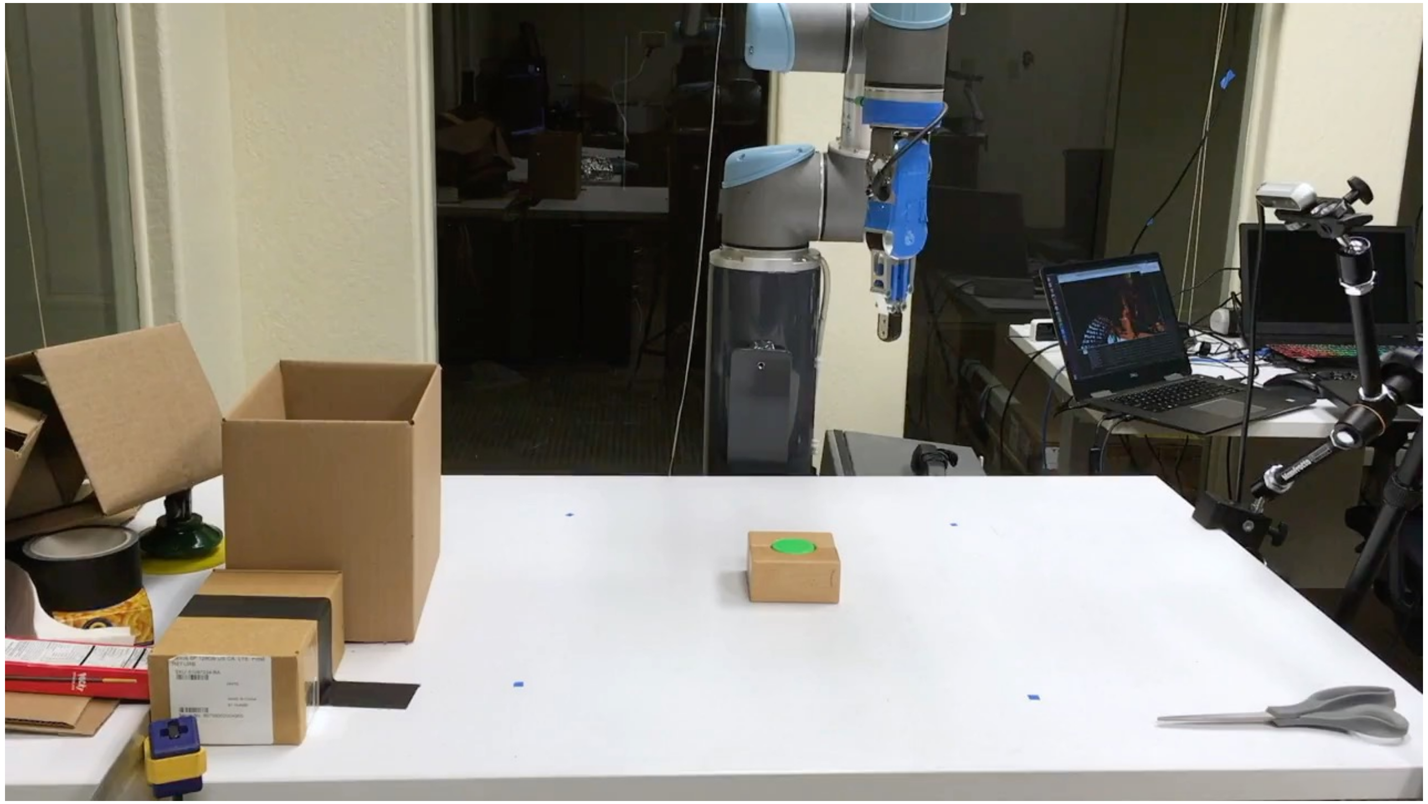
目录

强化学习的典型应用：自动驾驶

https://neptune.ai/blog/reinforcement-learning-applications

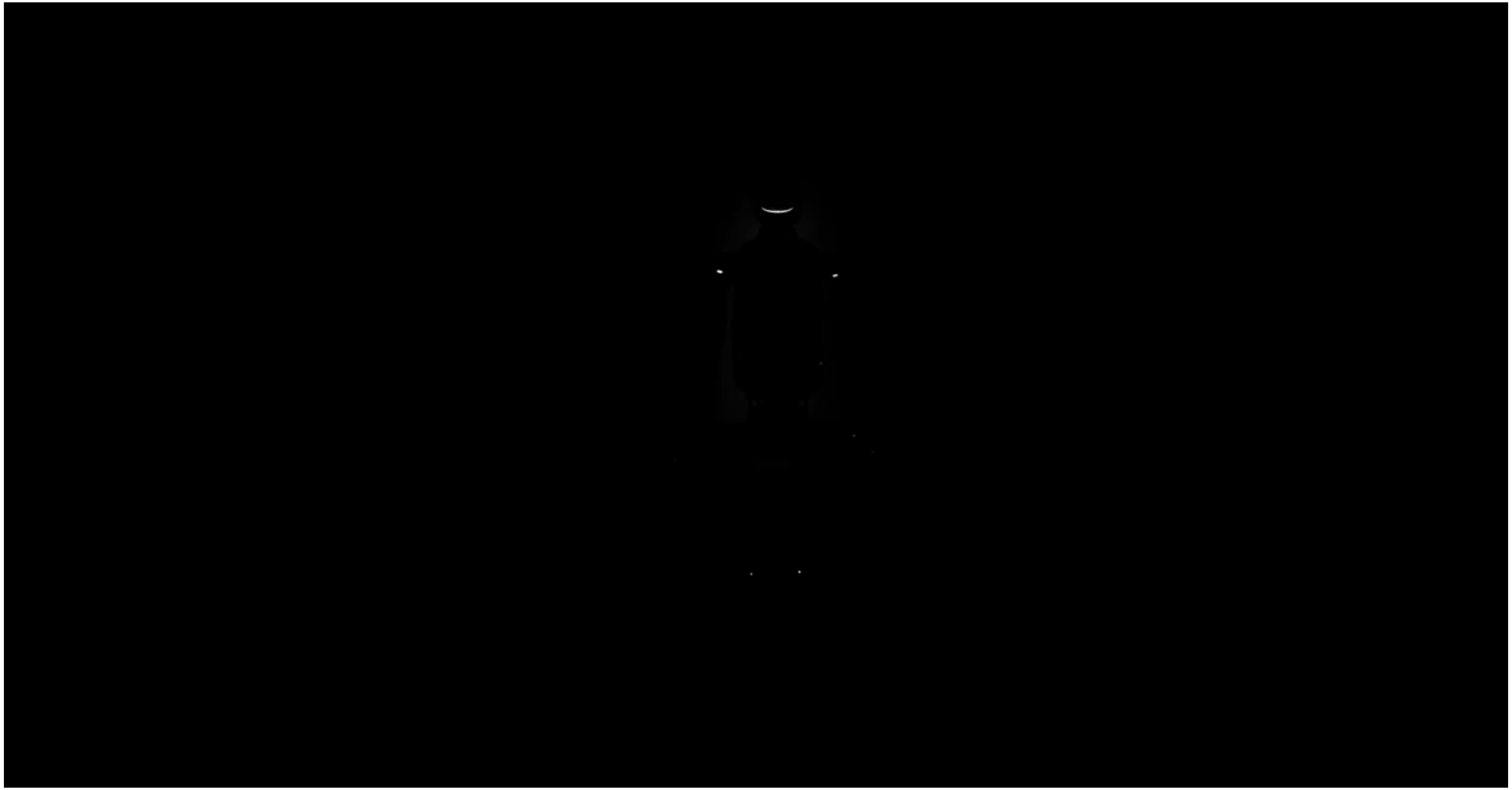
机械臂





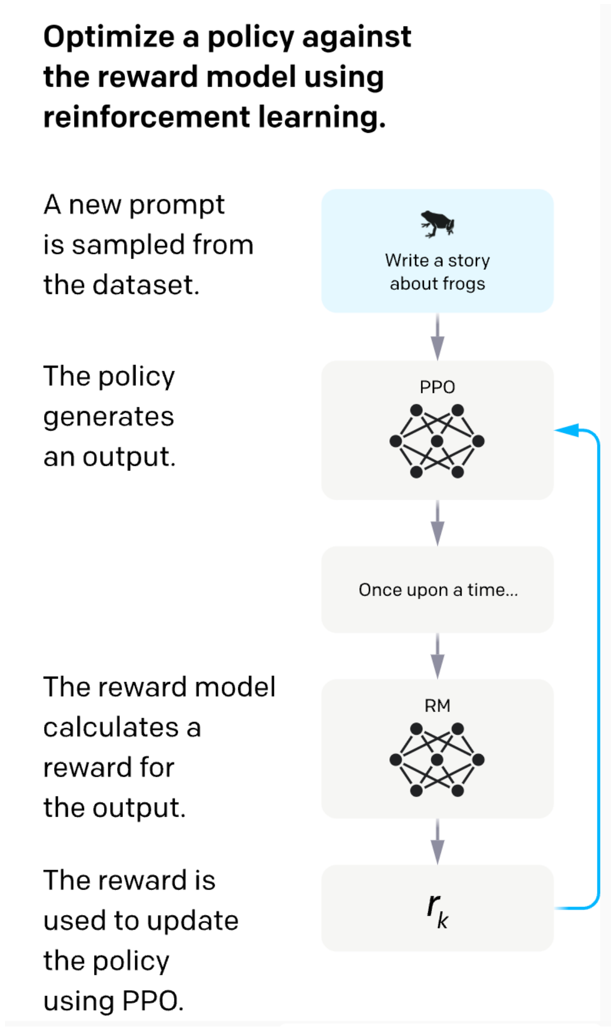
https://vpg.cs.princeton.edu/

工业自动化



https://www.figure.ai/

RL in NLP



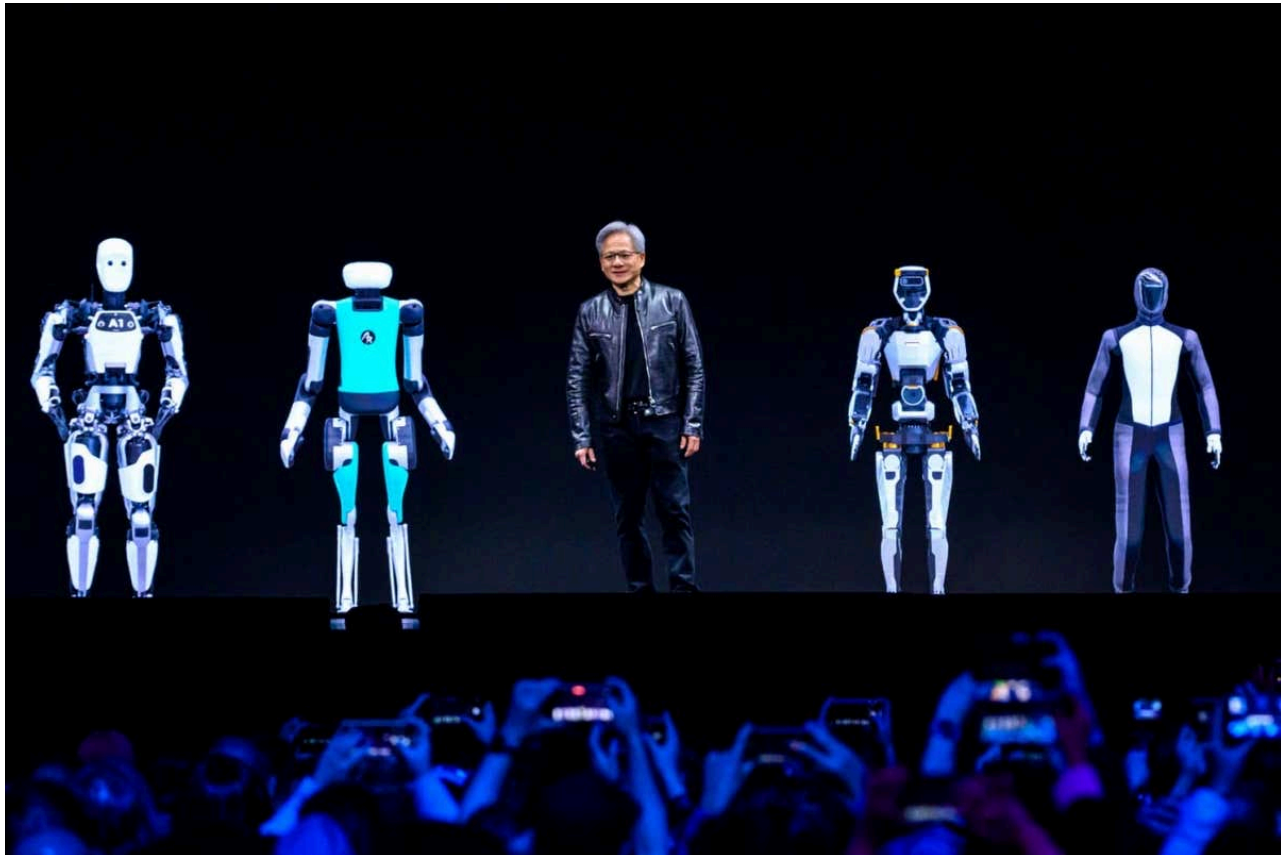
人在回路强化学习

RLHF（Reinforcement Learning from Human Feedback）

帮助模型生成更符合人类价值观的回答

大语言模型安全对齐

具身智能



英伟达发布人形机器人通用基础模型Project GR00T和新型计算机 Jetson Thor

18 March 2024

具身智能

Tesla's Optimus robots were serving drinks, handing out gift bags, and dancing at the company's 'We, Robot' event

9 October 2024

https://www.tesla.com/we-robot

https://www.youtube.com/watch?v=Q9Ze7OSfZzE

谢谢！